

Quantitatives Prognosemodell für die Anwendung des Black-Litterman-Verfahrens

Franziska Feilke* und Marc Gürtler**

Abstract:

Die Schätzung erwarteter Wertpapierrenditen stellt eine der zentralen Aufgaben in der praktischen Umsetzung des Markowitz-Portfolioselektionsmodells dar. Vor diesem Hintergrund entwickelten Black-Litterman (1992) ein Verfahren, das zum einen auf (theoretisch fundierten) erwarteten Renditen im Kapitalmarktgleichgewicht basiert, und zum anderen subjektive Prognosen von Analysten berücksichtigt. Im Gegensatz zur historischen Schätzung erwarteter Renditen, die in der Markowitz Optimierung zu recht extremen Wertpapieranteilen führt, resultieren bei Anwendung des Black-Litterman-Verfahrens meist recht ausgeglichene Portfoliogewichte. Das Vorliegen von Analystenschätzungen ist für das Black-Litterman-Verfahren allerdings zentral, so dass bei fehlenden Schätzungen aktives Portfoliomanagement nicht mehr möglich ist. Auch ergeben sich häufig Anwendungsprobleme, da Analystenprognosen typischerweise nicht so konkret abgegeben werden, wie dies für das Black-Litterman-Verfahren notwendig ist. Vor diesem Hintergrund wird dargelegt, wie (öffentlich zugängliche) Dividendenschätzungen für die Ermittlung einer a-priori-Schätzung der erwarteten Rendite genutzt und in das Black-Litterman-Modell integriert werden können. Dabei werden zum einen Konfidenzwahrscheinlichkeiten der Prognose aus der Anzahl der von den Analysten abgegebenen Schätzungen ermittelt und zum anderen wird zu diesem Zweck auf ein Monte-Carlo-Simulationsverfahren abgestellt. In einer nachfolgenden empirischen Untersuchung wird weiterhin ausgehend von den beiden unterschiedlichen Arten der Prognoseermittlung die Wirkung des Black-Litterman-Verfahrens auf die Portfoliogewichte untersucht. Abschließend wird eine out-of-sample Performanceanalyse des Black-Litterman-Verfahrens im Vergleich zu alternativen Portfolioallokationsstrategien durchgeführt.

* **Dipl.-Math. Oec. Franziska Feilke**
Technische Universität Braunschweig
Lehrstuhl für BWL, insbes. Finanzwirtschaft
Abt.-Jerusalem-Str. 7
D-38106 Braunschweig
Deutschland
Phone: +49 531 3912893
Fax: +49 531 3912899
e-mail: f.feilke@tu-bs.de

** **Professor Dr. Marc Gürtler**
Technische Universität Braunschweig
Lehrstuhl für BWL, insbes. Finanzwirtschaft
Abt.-Jerusalem-Str. 7
D-38106 Braunschweig
Deutschland
Phone: +49 531 3912895
Fax: +49 531 3912899
e-mail: marc.guertler@tu-bs.de

Quantitatives Prognosemodell für die Anwendung des Black-Litterman-Verfahrens

Abstract:

Die Schätzung erwarteter Wertpapierrenditen stellt eine der zentralen Aufgaben in der praktischen Umsetzung des Markowitz-Portfolioselektionsmodells dar. Vor diesem Hintergrund entwickelten Black-Litterman (1992) ein Verfahren, das zum einen auf (theoretisch fundierten) erwarteten Renditen im Kapitalmarktgleichgewicht basiert, und zum anderen subjektive Prognosen von Analysten berücksichtigt. Im Gegensatz zur historischen Schätzung erwarteter Renditen, die in der Markowitz Optimierung zu recht extremen Wertpapieranteilen führt, resultieren bei Anwendung des Black-Litterman-Verfahrens meist recht ausgeglichene Portfoliogewichte. Das Vorliegen von Analystenschätzungen ist für das Black-Litterman-Verfahren allerdings zentral, so dass bei fehlenden Schätzungen aktives Portfoliomanagement nicht mehr möglich ist. Auch ergeben sich häufig Anwendungsprobleme, da Analystenprognosen typischerweise nicht so konkret abgegeben werden, wie dies für das Black-Litterman-Verfahren notwendig ist. Vor diesem Hintergrund wird dargelegt, wie (öffentlich zugängliche) Dividendenschätzungen für die Ermittlung einer a-priori-Schätzung der erwarteten Rendite genutzt und in das Black-Litterman-Modell integriert werden können. Dabei werden zum einen Konfidenzwahrscheinlichkeiten der Prognose aus der Anzahl der von den Analysten abgegebenen Schätzungen ermittelt und zum anderen wird zu diesem Zweck auf ein Monte-Carlo-Simulationsverfahren abgestellt. In einer nachfolgenden empirischen Untersuchung wird weiterhin ausgehend von den beiden unterschiedlichen Arten der Prognoseermittlung die Wirkung des Black-Litterman-Verfahrens auf die Portfoliogewichte untersucht. Abschließend wird eine out-of-sample Performanceanalyse des Black-Litterman-Verfahrens im Vergleich zu alternativen Portfolioallokationsstrategien durchgeführt.

1 Einleitung

Gegenstand der Portfoliotheorie ist die Frage, wie ein Anleger seine finanziellen Mittel bestmöglich in die am Markt vorhandenen Wertpapiere investiert. Die grundlegenden Arbeiten in diesem Bereich stammen von Harry Markowitz (1952, 1959). Er schlägt vor, dass sich risikoaverse Investoren bei der Entscheidung zur Portfoliozusammensetzung aus N Wertpapieren nach dem Erwartungswert μ_p und der Varianz σ_p^2 der Gesamtportfoliorendite richten sollen, wobei bei konstanter absoluter Risikoaversion die folgende Präferenzfunktion maximiert wird:¹

$$\phi = \mu_p - \frac{\lambda}{2} \sigma_p^2 = \mathbf{X}'\boldsymbol{\mu} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X} \quad \rightarrow \max_{\mathbf{X}}! \quad (1)$$

Dabei ist \mathbf{X} der N -Vektor der Wertpapiergewichte: $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N)'$, $\boldsymbol{\Sigma}$ bezeichnet die $N \times N$ Varianz-Kovarianzmatrix der Wertpapiere, $\boldsymbol{\mu}$ bezeichnet den Erwartungswertvektor der Wertpapierrenditen und λ den Risikoaversionsparameter.

Ein Problem der Portfoliotheorie liegt in der Schätzung der eingehenden Parameter: Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der einzelnen Wertpapierrenditen. Die Inputparameter werden geschätzt, und im Optimierungsalgorithmus wird davon ausgegangen, dass sie die wahren Werte der Renditemomente sind. Jedoch sind zukünftige Renditen zufällige Größen und ihre wahren Ausprägungen unterscheiden sich von ihrem Erwartungswert. Häufig resultieren aus dem Optimierungsalgorithmus extrem hohe Leerverkaufspositionen oder bei Einschränkung der Portfoliogewichte zwischen null bis eins gibt es wenige positive Gewichte und eine Vielzahl an Wertpapieren wird nicht in das optimale Portfolio aufgenommen. Diese Portfoliogewichte führen – sollten die Parameter tatsächlich eintreten – natürlich zum höchsten Präferenzniveau, weichen die Parameter allerdings von den Prognosen ab, so könnte das gering diversifizierte Portfolio ein schlechtes Präferenzniveau erzielen, wenn sich die jeweils gewählten Aktien suboptimal entwickeln. Der aus dem Maximierungsproblem (1) abgeleitete optimale Gewichtsvektor

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (2)$$

ist weiterhin sehr sensitiv bezüglich der Eingangsparameter. Bereits marginale Veränderungen in den Renditeerwartungen können große Veränderungen in den Portfoliogewichten her-

¹ Eine Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion und die Annahme normalverteilter Renditen führen zu diesem Sicherheitsäquivalent, das anstelle der Maßzahl des Erwartungsnutzens maximiert werden kann. Vgl. dazu Anderson/Bancroft (1952), S. 37; Freund (1956).

vorrufen.² Bezüglich Änderungen in Varianzen und Kovarianzen ist die Sensitivität der Gewichte nicht so stark wie bei Änderungen in den erwarteten Renditen.³

Das von Black und Litterman (1992) entwickelte Verfahren kombiniert gleichgewichtige erwartete Renditen mit persönlichen subjektiven Prognosen und ist in der Praxis auf eine breite Akzeptanz gestoßen.⁴ Werden nur für einige Wertpapiere Prognosen abgegeben, weichen nur diese Wertpapiergewichte von den Gewichten dieses Wertpapiers im Marktportfolio ab. Freilich müssen Prognosen aufgestellt werden, um überhaupt von den verständlichen und realisierbaren Marktgewichten abzuweichen. Wenn man keine eigenen Prognosen aufstellen kann, so bietet das Black-Litterman-Verfahren nicht die Möglichkeit aktives Portfoliomanagement zu betreiben. Selbst wenn man einzelne Prognosen für Aktienrenditen abgeben kann, so stützen sich diese auf einzelne Meinungen – sei es die eigene Prognose oder die Erwartung eines Analysten. In diesem Beitrag werden zwei Möglichkeiten beschrieben, wie Prognosen für das Black-Litterman-Verfahren mit Hilfe von Bewertungsmodellen und einer Vielzahl von Analystenschätzungen quantifiziert werden können. Weiterhin wird eine unseres Erachtens bisher einmalige out-of-sample Performanceanalyse des Black-Litterman-Verfahrens durchgeführt.

Herold (2003) beschreibt einen Ansatz, in dem das Black-Litterman Verfahren mit qualitativen Analystenprognosen angewendet werden kann. Im Rahmen des aktiven Portfoliomanagements wird das optimale Portfolio dabei so gewählt, dass ein vorgegebener tracking error erreicht wird. Allerdings beruht die Zusammenstellung des Portfolios auf den Prognosen eines Analysten und nicht auf einer Vielzahl von Analystenschätzungen. Jones (2007) erstellt Prognosen auf der Basis eines Faktormodells. Die Konfidenzwahrscheinlichkeiten der Prognosen werden auf Basis der historischen Renditekovarianzen und –varianzen aus dem Modell ermittelt. In unserem Beitrag wird für die Ermittlung der Konfidenzwahrscheinlichkeiten nicht auf die historische Varianz-Kovarianzmatrix zurückgegriffen, sondern das Vertrauen in die Prognosen wird direkt aus den Analystenschätzungen abgeleitet.

Zunächst werden in Kapitel 2 die Grundlagen des Black-Litterman-Verfahrens erläutert. Anschließend werden in Kapitel 3 die beiden Methoden zur Aufstellung von Prognosen für das Black-Litterman-Verfahren erläutert. In Abschnitt 3.1 wird dafür auf die Anzahl der Analys-

² Eine Sensitivitätsstudie findet sich beispielsweise in Kempf/Memmel (2002).

³ Vgl. Chopra/Ziembra (1993).

⁴ Vgl. Herold (2004), S. 285. Die Investmentbank Goldman Sachs verwendet beispielsweise das Black-Litterman-Verfahren. Vgl. He/Litterman (1999).

tenschätzung zurückgegriffen, in Abschnitt 3.2 wird eine Monte-Carlo-Simulation zur Generierung der Prognosen beschrieben. In der empirischen Untersuchung in Kapitel 4 werden die Input- und Outputparameter der beiden in Kapitel 3 beschriebenen Verfahren mit Hilfe von realen Kapitalmarktdaten analysiert und schließlich wird in Abschnitt 4.3 eine out-of-sample Performance der Verfahren berechnet. Im Kapitel 5 werden die Ergebnisse zusammengefasst.

2 Grundlagen des Black-Litterman-Verfahrens

2.1 Grundidee

Black und Litterman (1992) kombinieren in ihrem Verfahren gleichgewichtige erwartete Renditen mit eigenen Erwartungen der Investoren, um einen neuen Vektor der erwarteten Renditen μ_{BL} zu berechnen, der in die Markowitz-Optimierung einfließt. Durch die Optimierung sollen auch ohne Leerverkaufs- oder sonstige Restriktionen relativ ausgewogene Portfolios resultieren. Die gleichgewichtigen erwarteten Renditen werden aus dem Marktportfolio abgeleitet.⁵

Zunächst wird davon ausgegangen, dass der Renditevektor r der N betrachteten Wertpapiere normalverteilt ist mit einem $N \times 1$ Erwartungswertvektor μ und der $N \times N$ Varianz-Kovarianzmatrix Σ :

$$r \sim N(\mu, \Sigma). \quad (3)$$

Die Varianz-Kovarianzmatrix wird als bekannt vorausgesetzt und historisch geschätzt,⁶ der Vektor der erwarteten Renditen μ sei hingegen ein Zufallsvektor, der einer Normalverteilung mit bekannten Parametern Π , τ und Σ folgt:

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma). \quad (4)$$

Π stellt hierbei den $N \times 1$ Renditeerwartungswertvektor des Marktportfolios dar und dient als neutraler Referenzpunkt. Die Berechnung von Π wird in Abschnitt 2.2 beschrieben. Die Varianz-Kovarianzmatrix des Erwartungswertvektors μ wird als Vielfaches der Varianz-Kovarianzmatrix der Renditen r mit einem Skalierungsfaktor $\tau > 0$ gewählt. Der Faktor wird in dem Ansatz nicht fest vorgegeben. Da Black und Litterman davon ausgehen, dass die Unsi-

⁵ Es wird streng genommen natürlich ein Stellvertreter für das Marktportfolio gewählt, da das Marktportfolio im Grunde nicht nachgebildet werden kann. Vgl. hierzu Roll (1977).

⁶ Vgl. Black/Litterman (1992), S. 43.

cherheit über den erwarteten Renditevektor kleiner ist als die Unsicherheit (hier also die Varianz-Kovarianzmatrix) der Renditen, schlagen sie vor, ein recht kleines τ zu wählen.⁷

2.2 Der neutrale Referenzpunkt

Als Ausgangspunkt für die erwarteten Renditen nutzen Black und Litterman (1992) das Marktportfolio.⁸ Über eine Rückwärtsoptimierung werden die erwarteten Renditen des Marktportfolios bestimmt. Dabei geht man von einem Investor i mit einer Präferenzfunktion (1) aus. Stellt man Gleichung (2) nach dem Renditevektor μ um, so erhält man:

$$\mu = \lambda_i \cdot \Sigma \cdot X. \quad (5)$$

Der Vektor der erwarteten Wertpapierrenditen μ ergibt sich also als ein Vielfaches des Produkts der Varianz-Kovarianzmatrix mit dem Wertpapiergewichtsvektor. Die optimalen Wertpapieranteile X sind bei Festlegung eines Marktportfolios aus N Aktien durch die Marktkapitalisierungen der einzelnen Wertpapiere im Verhältnis zur gesamten Marktkapitalisierung gegeben:

$$x_j = \frac{\eta_j \cdot P_j}{\sum_{i=1}^N \eta_i \cdot P_i}. \quad (6)$$

η_j gibt dabei die Anzahl der j -ten Aktie auf dem Kapitalmarkt an und P_j den aktuellen Preis der j -ten Aktie. Die fehlende Komponente zur Berechnung von μ aus Formel (5) ist schließlich noch die Risikoaversion. Legt man das Capital-Asset-Pricing Modell zugrunde, so ergibt sich der Risikoaversionsparameter als Marktpreis des Risikos.⁹ Lässt man den Parameter λ_i unbestimmt, so kann man dennoch die relativen erwarteten Renditen mit Hilfe von (5) und (6) bestimmen. Werden die berechneten Wertpapierrenditen μ in einer Markowitz-Optimierung genutzt, erhält man für beliebige λ_i erwartungsgemäß die Gewichte des Marktportfolios.

2.3 Aussichten der Investoren

Als zusätzliche Meinung können Investoren k Einschätzungen über die erwarteten Renditen in folgender Form abgeben:

⁷ Vgl. Black/Litterman (1992), S. 34.

⁸ Zur Auswahl einer geeigneten Referenzrendite diskutieren Black und Litterman auch historische erwartete Renditen der einzelnen Wertpapiere, gleiche erwartete Renditen innerhalb der Assetklassen sowie risikoadjustierte erwartete Renditen. Sie kommen allerdings zu dem Schluss, dass Marktrenditen im Gegensatz zu den anderen Strategien die ausgewogensten und intuitivsten Portfolios generieren.

⁹ Vgl. Pitts (1998), S. 123 f. Drobetz (2003) setzt beispielsweise den Risikoaversionsparameter auf Eins fest.

$$Q = P' \mu + \varepsilon, \text{ mit } \varepsilon \sim N(0, \Omega). \quad (7)$$

Q ist dabei ein $k \times 1$ Vektor von k Prognoseerwartungen und P eine bekannte $N \times k$ Prognosematrix. Der $k \times 1$ Vektor ε folgt einer Normalverteilung mit Erwartungsvektor Null und einer Varianz-Kovarianzmatrix Ω . Ω stellt nach Black/Litterman eine Diagonalmatrix dar,¹⁰ Einschätzungen sind damit untereinander unabhängig.¹¹ Diese Annahme ist eher kritisch zu sehen, da Einschätzungen einer bestimmten Industriebranche sicherlich nicht unabhängig voneinander sind. Die Einträge auf der Diagonalen geben die Sicherheit des Investors in die jeweilige Prognose an: je größer der Eintrag, desto unsicherer ist der Investor bzgl. seiner Vorhersage. Die Einschätzungen können sowohl absolut als auch relativ angegeben werden, und es muss nicht für jede Aktie eine Prognose abgegeben werden. Die Aufstellung von Gleichung (7) wird exemplarisch an dem folgenden Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 2.1:

- (a) Der Investor ist sich sicher, dass die erwartete Rendite von Aktie 1 20 % betragen wird.
- (b) Der Investor glaubt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %, dass die Differenz der erwarteten Renditen zwischen einem gleichgewichteten Portfolio aus Aktie 1 und Aktie 3 und einem gleichgewichteten Portfolio aus Aktie 4, 5 und 6 zwischen 5 % und 7 % betragen wird.

Diese Prognosen werden für einen Anlagehorizont von 6 Aktien in Form von Gleichung (7) dann folgendermaßen aufgestellt:

$$\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & -0,33 & -0,33 & -0,33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\text{mit } \varepsilon \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9,317 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}\right).$$

¹⁰ Vgl. Black/Litterman (1992), S. 35.

¹¹ Sind die Einträge der Varianz-Kovarianzmatrix außerhalb der Diagonalen Null, so kann man zunächst nur davon sprechen, dass die Einschätzungen unkorreliert untereinander sind. Bei Annahme einer Normalverteilung ist die Unkorreliertheit allerdings äquivalent zur Unabhängigkeit. Vgl. dazu auch Fahrmeir et al. (1997), S. 349.

Der erste Eintrag des Vektors Q enthält die erwartete Rendite der Aktie 1 mit 20 %. Prognose (a) ist absolut angegeben und an dem ersten Eintrag (für die erste Aktie) der ersten Prognosezeile in der Matrix P' steht zu diesem Zweck eine Eins. Da sich der Investor bezüglich dieser Prognose sicher ist, beträgt die Varianz ω_{11} des Fehlerterms ε_1 Null. Prognose (b) ist eine relative Prognose. Der Mittelwert der Prognose (b) wird dabei an die zweite Stelle des Vektors Q geschrieben. Die zweite Zeile der Matrix P' betrifft Prognose (b). Da der relative Vergleich gleichgewichtete Portfolios zwischen Aktien 1, 3 und Aktien 4, 5 und 6 betrifft, steht in der entsprechenden Spalte eine $1/2$ bei Aktien 1 und 3 und $-1/3$ bei Aktien 4, 5 und 6.¹² Die Unsicherheit der Prognose, wird durch die Wahrscheinlichkeit des Investors zum Ausdruck gebracht. Je sicherer sich der Investor bezüglich einer Prognose ist, desto kleiner ist die Varianz an der entsprechenden Stelle der Matrix Ω . Der Eintrag ω_{22} wird beispielhaft im Anhang hergeleitet. Die zweite Spalte der Matrix P enthält ausschließlich Nullen, da weder absolute noch relative Prognosen der zweiten Aktie abgegeben wurden.

Um die Verteilung von Q herzuleiten, wird die Verteilung der erwarteten Renditen μ benötigt, die in (4) als normalverteilt angenommen wurden: $\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$. Insgesamt ergibt sich für die Verteilung der Prognosen des Investors:

$$Q \sim N(P'\Pi, P'\tau\Sigma P + \Omega). \quad (9)$$

2.4 Kombination der beiden Sichten

Mit den weiteren Informationen der individuellen Sichtweisen der Investoren soll nicht mehr die alleinige Information über die Renditeverteilung $E(r) = \Pi$ und $\text{Cov}(r, r') = \Sigma$ für die Portfoliooptimierung genutzt werden, sondern es wird die bedingte Verteilung der Renditen gegeben die Aussichten der Investoren gesucht. Der Erwartungswertvektor und die Varianz-Kovarianzmatrix der bedingten Verteilung ergeben sich zu:¹³

$$E(r|Q) \equiv \mu_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P(P'\Sigma P\tau + \Omega)^{-1}(Q - P'\Pi), \quad (10)$$

$$\text{Var}(r|Q) = \Sigma + \tau\Sigma - \tau^2\Sigma P(P'\Sigma P\tau + \Omega)^{-1}P'\Sigma. \quad (11)$$

¹² Es können beispielsweise auch relative Prognosen über marktwertgewichtete Teilportfolios abgegeben werden. Vgl. Drobotz (2003), S. 220 f.

¹³ Vgl. Herold (2004), S. 289, Memmel (2004), S. 119.

Der Erwartungswert der bedingten Verteilung ist ein matrixgewichteter Durchschnitt der Erwartungswerte der Einzelverteilungen. In der Literatur wird häufig auch eine alternative Schreibweise verwendet:

$$E(r | Q) = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P \Omega^{-1} P' \right]^{-1} \cdot \left[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P \Omega^{-1} Q \right], \quad (12)$$

die ohne weiteres in die Schreibweise von (10) überführbar ist.¹⁴

Wenn die Unsicherheit über die eigenen Aussichten gegen Unendlich geht, so vertraut man nur noch auf die erwarteten Gleichgewichtsrenditen

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} E(r | Q) = \Pi. \quad (13)$$

Entsprechend vertraut man nur auf die Markterwartungen, wenn die Unsicherheit der erwarteten Renditen gegen Null geht:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E(r | Q) = \Pi. \quad (14)$$

Ist man sich seiner Prognosen jedoch sicher, d.h. $\Omega = 0$, so erhält man als bedingten Erwartungswert

$$E(r | Q) = \Pi + \tau \Sigma P (P' \Sigma P \tau)^{-1} (Q - P' \Pi). \quad (15)$$

Da auch relative Prognosen zwischen den einzelnen Prognosen abgegeben werden, resultieren nicht unmittelbar die Prognoserenditen aus Q . Werden für einzelne Aktien i absolute Prognosen mit Konfidenzwahrscheinlichkeit Eins abgegeben, so entspricht die jeweilige erwartete Black-Litterman-Rendite $\mu_{BL,i}$ genau der Prognoserendite Q_i .

Nutzt man den bedingten Erwartungswert des Black-Litterman Verfahrens für die Markowitz-Optimierung, so erhält man ausgewogenere Portfolios. Wird beispielsweise nur eine absolute Prognose zu einer Aktie abgegeben, so verändern sich dennoch durch die Kovarianzmatrix der Renditen Σ alle weiteren erwarteten Renditen der bedingten Verteilung. Setzt man den Erwartungswert der Prognoseverteilung in einer Portfoliooptimierung ein, so erhält man für alle Aktien, für die keine Prognosen abgegeben wurden, unveränderte Portfoliogewichte, für die eine Aktie mit einer Prognose allerdings das nach der Prognose angepasste Gewicht. Dies gilt natürlich nur für den Fall, dass keine Restriktionen bindend sind. Soll die Summe der

¹⁴ Vgl. Pitts (1998), S. 144, Black/Litterman (1992), S. 42; Lindley/Smith (1972).

Gewichte allerdings eins betragen, so bleibt das Verhältnis der Aktien ohne Prognose untereinander gleich.¹⁵

2.5 Probleme bei der Anwendung des Black-Litterman Verfahrens

Für das Black-Litterman Verfahren benötigt man, wie vorher beschrieben, eigene Prognosen über die Renditeerwartungen des Anlagespektrums. Häufig kennen sich institutionelle Investoren nur in einzelnen Marktsegmenten aus, wie beispielsweise das Segment „Aktien Europa“, aber haben kein Expertenwissen auf dem Gebiet „Aktien Asien“. Wenn diese Investoren aber auch in Segmente investieren möchten, über die sie keine Prognosen abgeben können, so würden sie nach Anwendung des Black-Litterman Verfahrens „nur“ das Marktportfolio in dem Bereich „Aktien Asien“ realisieren. Private Investoren, die eventuell gar keine Informationen bezüglich aller Wertpapiere besitzen, würden ebenfalls das Marktportfolio realisieren, womit man auf die Anwendung des Black-Litterman Verfahrens von vornherein verzichten kann. Weiterhin kommt hinzu, dass Analysten typischerweise keine Aussichten wie die in Beispiel 2.1 abgeben, so dass diese Möglichkeit der Generierung von Prognosen zur Abweichung vom Marktportfolio realiter ebenfalls nicht gegeben ist.

Um auf Expertenwissen für die Formulierung der Prognosen zurückzugreifen und die Möglichkeit zu haben, auch in weniger vertrauten Segmenten in der Wahl seines Portfolios vom Marktportfolio abzuweichen, wird im Folgenden ein Verfahren beschrieben, das mit Hilfe von Analystenschätzungen von Dividendenerwartungen Prognosen für das Black-Litterman Verfahren generiert.

3 Nutzung von Expertenschätzungen

3.1 Ermittlung der Prognosen aus der Anzahl der Analystenschätzungen

Historisch geschätzte Eigenkapitalrenditen haben sich als schlechte Schätzer für zukünftige Renditen erwiesen.¹⁶ Aus der Notwendigkeit heraus bessere Schätzer für zukünftige erwartete Renditen zu finden, hat sich die Literatur zur Ermittlung von impliziten Eigenkapitalrenditen

¹⁵ Vgl. Herold (2004), S. 289 f. Weiterhin führt Herold eine Fallstudie durch, in der die klassische Markowitz Optimierung und der Black-Litterman Ansatz verglichen werden: vgl. Herold (2004), S. 370 ff.

¹⁶ Vgl. Elton (1999), Jorion (1986), Kempf und Memmel (2002).

auf Basis von Bewertungsmodellen in den vergangenen Jahren rasant entwickelt. Mittlerweile gibt es zahlreiche empirische Untersuchungen zu den Bewertungsmodellen (beispielsweise Dividendendiskontierungsmodell, Discounted Cashflow Modell, Residualgewinnmodell, Ohlson/Jüttner-Nauroth (2005) Modell), die von Analystenschätzungen bezüglich einiger Parameter der Modelle ausgehen und gute Ergebnisse erzielen.¹⁷ Im Folgenden werden die Prognosen auf Basis des Dividendendiskontierungsmodells nach Williams (1938) und Gordon (1959, 1966) hergeleitet. Auf Basis der anderen Bewertungsmodelle sind grundsätzlich entsprechend Ableitungen von Prognosen möglich.

Im Dividendendiskontierungsmodell wird zu einem gegebenen Zeitpunkt t die erwartete Wertpapierrendite $\hat{\mu}_i^{(t)}$ auf Basis des Marktwerts des Eigenkapitals $EK_i^{(t)}$ eines Unternehmens i als interner Zinsfuß zur Zeitreihe erwarteter Dividendenzahlungen bestimmt. Es wird vorwiegend ein Zweiphasen-Modell angesetzt, wobei in der ersten Phase der Länge T Detailschätzungen der insgesamt von einem Unternehmen i ausgeschütteten Dividenden $\hat{D}_i^{(t)}$ vorliegen und in der folgenden zeitlich unbegrenzten Phase ohne solche Detailschätzungen ein konstantes Wachstum g der Dividenden angenommen wird:

$$EK_i^{(t)} = \sum_{\tau=1}^T \frac{D_i^{(t+\tau)}}{(1 + \mu_i^{(t)})^\tau} + \frac{D_i^{(t+T)} \cdot (1 + g)}{(\mu_i^{(t)} - g) \cdot (1 + \mu_i^{(t)})^T}. \quad (16)$$

Über Anbieter von Finanzdaten (in diesem Beitrag Thomson Financial Datastream) kann man auf folgende Daten von Analystenschätzungen zurückgreifen:

- Mittelwert D
- Median
- Standardabweichung σ_D
- höchste Schätzung D_{hi}
- niedrigste Schätzung D_{lo}
- die Anzahl NE der Analystenschätzungen

der erwarteten Dividenden für das nächste Jahr, das übernächste und das darauffolgende Jahr je Aktie. Nun stellt sich die Frage, wie das Konfidenzintervall und die Konfidenzwahrscheinlichkeit der Prognose anhand der vorhandenen Daten der Analystenschätzungen berechnet werden könnten.

¹⁷ Vgl. hierzu beispielsweise Botosan/Plumlee (2005), Courteau et al. (2001), Francis et al. (2000), Gebhardt et al. (2001), Gode/Mohanram (2003), Easton (2004), Daske et al. (2006).

In Validitätstests zur Beurteilung von berechneten erwarteten Renditen aus den oben genannten Bewertungsmodellen wird häufig eine Regression der erwarteten Renditen zu verschiedenen Risikofaktoren, wie beispielsweise Beta, Verschuldungsgrad, Marktkapitalisierung oder auch Informationsrisiko durchgeführt.¹⁸ Dabei wird ein bestimmter Zusammenhang des Risikofaktors zur erwarteten Rendite unterstellt und überprüft, ob dieser Zusammenhang nachgewiesen werden kann. Beim „Informationsrisiko“ wird davon ausgegangen, dass eine größere Menge an Informationen, die über ein Unternehmen bereitstehen, die Kapitalkosten des Unternehmens reduziert. Als Maß für das Informationsrisiko legen Botosan/Plumlee (2005) beispielsweise die Bandbreite der Vorhersagen zwischen minimaler und maximaler Schätzung zugrunde. Sie betonen, dass die Breite auch die Unsicherheit der Prognose widerspiegelt. Brennan et al. (1993) stellen heraus, dass Firmen mit einer größeren Analystenabdeckung schneller auf Marktinformationen in ihren Preisen reagieren. Diese Untersuchungsergebnisse setzen Gebhardt et al. (2001) um, indem sie die Anzahl an Analystenschätzungen ebenso als Maß für das Informationsrisiko zugrunde legen – je mehr Analystenschätzungen vorhanden sind, desto niedriger sollten die Eigenkapitalkosten des jeweiligen Unternehmens sein. In diesem Beitrag wird ebenfalls der Zusammenhang unterstellt, wonach die Unsicherheit der Analystenschätzungen negativ von der Anzahl der Analystenschätzungen abhängt.

Die Anzahl an Analystenschätzungen wird im Folgenden mit der Wahrscheinlichkeit des Zutreffens einer Prognose in Verbindung gebracht. Um die absoluten Grenzen $\mu_{i,lo}^{(t)}$ und $\mu_{i,hi}^{(t)}$ der Analystensichten wie in Beispiel 2.1 5 % und 7 % zu generieren, werden zunächst zwei erwartete Renditen je Zeitpunkt und Aktie mit Hilfe von der höchsten und der niedrigsten Dividendenerwartung der Analysten für diese Aktie und diesen Zeitpunkt berechnet:

$$EK_i^{(t)} = \sum_{\tau=1}^3 \frac{D_{i,lo}^{(t+\tau)}}{(1 + \mu_{i,lo}^{(t)})^\tau} + \frac{D_{i,lo}^{(t+3)} \cdot (1 + g_{lo})}{(\mu_{i,lo}^{(t)} - g_{lo}) \cdot (1 + \mu_{i,lo}^{(t)})^3}, \quad (17)$$

$$EK_i^{(t)} = \sum_{\tau=1}^3 \frac{D_{i,hi}^{(t+\tau)}}{(1 + \mu_{i,hi}^{(t)})^\tau} + \frac{D_{i,hi}^{(t+3)} \cdot (1 + g_{hi})}{(\mu_{i,hi}^{(t)} - g_{hi}) \cdot (1 + \mu_{i,hi}^{(t)})^3}. \quad (18)$$

Die Konfidenzwahrscheinlichkeiten für die Varianz-Kovarianzmatrix Ω werden mit Hilfe der Anzahl der Analystenschätzungen berechnet. Für jede Aktie, jeden Zeitpunkt und jede Vorhersagevariable gibt es eine Anzahl an Analysten, die diese Schätzung abgegeben haben. Also gibt es beispielsweise für die VW-Aktie im Monat Oktober die Dividendenschätzungen $D_{VW,Okt}^{(1)}$, $D_{VW,Okt}^{(2)}$, $D_{VW,Okt}^{(3)}$ für das nächste, das übernächste und das darauffolgende Jahr und für

¹⁸ Vgl. Botosan/Plumlee (2005), Gebhardt et al. (2001).

jeden dieser einzelnen Schätzungen steht die Anzahl der Analysten, die Schätzungen abgegeben haben, zur Verfügung: $NE_{VW,OkT}^{(1)}, NE_{VW,OkT}^{(2)}, NE_{VW,OkT}^{(3)}$. Geht man davon aus, dass alle Analysten prinzipiell für alle Aktien Schätzungen abgeben können, so kann man die Anzahl an abgegebenen Schätzungen mit der Unsicherheit bezüglich der Schätzungen in Beziehung setzen. Je weniger Schätzungen abgegeben wurden, desto unsicherer sind sich die Analysten bezüglich der weiteren Entwicklung der Aktie. Abarbanell/Bernard (2000) und Courteau et al. (2001) messen einen starken Einfluss des Endwerts $(D_i^{(t+T)} \cdot (1+g)) / ((\mu_i^{(t)} - g) \cdot (1+\mu_i^{(t)})^T)$ auf die Schätzung der erwarteten Rendite. Aufgrund dieser großen Bedeutung des letzten Terms in (16) wird für die Konfidenzwahrscheinlichkeit die Anzahl der Analystenschätzungen für das letzte (dritte) Jahr zugrunde gelegt. Als Ausgangspunkt markiert die maximale Anzahl an Analystenschätzungen, die über den gesamten betrachteten Zeitraum und über das gesamte Aktienuniversum erreicht wird, eine Konfidenzwahrscheinlichkeit von 100 %. Falls also alle Analysten Schätzungen für das dritte Jahr für eine Aktie in einem Zeitpunkt abgeben, so beträgt die Konfidenzwahrscheinlichkeit für das oben berechnete Konfidenzintervall 100 %. Würde keine Schätzung für das dritte Jahr für eine Aktie in einem Zeitpunkt abgeben werden, so betrüge die Konfidenzwahrscheinlichkeit 0 %. Die Anzahl der Analystenschätzungen für das dritte kommende Jahr wird dann für jede Aktie und jeden Zeitpunkt in eine Konfidenzwahrscheinlichkeit linear zwischen 0 und 100 % interpoliert.

Die Prognose nach (7) sieht somit folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu_{1,lo}^{(t)} + \mu_{1,hi}^{(t)}}{2} \\ \frac{\mu_{2,lo}^{(t)} + \mu_{2,hi}^{(t)}}{2} \\ \vdots \\ \frac{\mu_{N,lo}^{(t)} + \mu_{N,hi}^{(t)}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}, \text{ mit } \varepsilon \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{NN} \end{pmatrix} \right). \quad (19)$$

Die Prognosematrix ist in diesem Fall eine Einheitsmatrix, und es gibt für jede Aktie eine absolute Prognose. Gleichung (10) vereinfacht sich dadurch folgendermaßen:

$$E(r|Q) = \Pi + \tau \Sigma (\Sigma \tau + \Omega)^{-1} (Q - \Pi). \quad (20)$$

Wenn für einen Teil der Aktien im Portfolio Analystenschätzungen fehlen, so kann man die fehlenden Aktienprognosen ohne Probleme in der Prognosematrix ignorieren. Als optimale Gewichte für Aktien ohne Prognosen erhält man schließlich wieder die Marktgewichte.

3.2 Ermittlung der Prognosen mittels einer Monte-Carlo-Simulation

Weiterhin könnte man die Varianz-Kovarianzmatrix Ω der Prognosen auch aus den gegebenen Analystenschätzungen bestimmen, indem man die angegebenen Standardabweichungen der Analysten bezüglich der Dividendenschätzungen direkt in Standardabweichungen für die prognostizierten erwarteten Renditen umrechnet. Dazu wird eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt, um die Standardabweichung der erwarteten Rendite aus der folgenden Gleichung zu ermitteln:

$$EK_i^{(t)} = \sum_{\tau=1}^3 \frac{D_{i,s}^{(t+\tau)}}{(1 + \mu_{i,s}^{(t)})^\tau} + \frac{D_{i,s}^{(t+3)} \cdot (1 + g_s)}{(\mu_{i,s}^{(t)} - g_s) \cdot (1 + \mu_{i,s}^{(t)})^3}. \quad (21)$$

Es werden für eine Aktie i zum Zeitpunkt t für jeden Parameter, der für die Berechnung der erwarteten Rendite benötigt wird, $s = 1, \dots, S$ Zufallszahlen gezogen, wobei S die Anzahl der Simulationsdurchläufe darstellt:

- normalverteilte Schätzung von $D_{i,s}^{(t+1)}$ mit Mittelwert $D_i^{(t+1)}$ und Standardabweichung $\sigma_{D,i}^{(t+1)}$, die von Thomson Financial bereitstehen: $D_{i,s}^{(t+1)} \sim N(D_i^{(t+1)}, \sigma_{D,i}^{(t+1)})$
- $D_{i,s}^{(t+2)} \sim N(D_i^{(t+2)}, \sigma_{D,i}^{(t+2)})$ und $D_{i,s}^{(t+3)} \sim N(D_i^{(t+3)}, \sigma_{D,i}^{(t+3)})$ ¹⁹
- Wachstumsrate gleichverteilt mit $g \in [g_{lo}, g_{hi}]$.

Auf der Basis jeweils eines simulierten Datensatzes s $D_{i,s}^{(t+1)}, D_{i,s}^{(t+2)}, D_{i,s}^{(t+3)}, g_s$ wird eine erwartete Rendite $\mu_{i,s}^{(t)}$ numerisch nach (21) berechnet. Man erhält schließlich S erwartete Renditen und ermittelt anschließend aus diesen die Varianz der erwarteten Rendite von Aktie i zum Zeitpunkt t . Die Varianzen werden schließlich in die Diagonale der Matrix Ω übernommen, und das Black-Litterman-Verfahren kann nachfolgend angewendet werden.

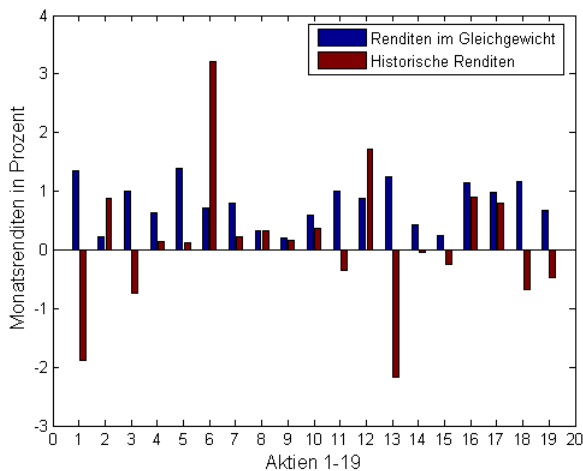
4 Empirische Untersuchung

4.1 Untersuchung der Methode auf Basis der Anzahl an Analystenschätzungen

Das Black-Litterman-Verfahren wird im Folgenden anhand von realen Kapitalmarktdaten durchgeführt. Dafür stehen monatliche Werte von allen 19 Aktien des DAX zur Verfügung,

¹⁹ Liegt nur eine Analystenschätzung vor, so existiert keine Standardabweichung der Analystenschätzungen. Die Anzahl von nur einer Analystenschätzung liegt in der empirischen Untersuchung in 28 der 3819 (=3*19*67) Fälle vor. In diesem Fall wird aufgrund der großen Unsicherheit bei nur einer Schätzung der Wert der Standardabweichung auf die höchste Standardabweichung aus den 19 Aktien über den gesamten Zeitraum festgelegt.

die vom 1.03.1996 bis zum 1.07.2004 die für die Untersuchung benötigten Daten aufweisen.²⁰ Der Zeitraum für die Portfoliooptimierung beginnt am 1.01.1999, die vorhergehenden Daten werden beispielsweise zur Berechnung der historischen Varianz-Kovarianzmatrix sowie dem historischen Mittelwert der realisierten Renditen genutzt.²¹ In Abbildung 4.1 sind die nach (5) ermittelten erwarteten gleichgewichtigen Renditen sowie die historischen Schätzer der erwarteten Renditen vom 1.07.2004 dargestellt.²² In den historischen Renditen auf Basis der letzten 35 Monate treten bei acht Aktien auch negative Renditen auf. Weiterhin haben Aktien 1, 6 und 13 im Vergleich zu den gleichgewichtigen erwarteten Renditen betragsmäßig hohe historische Renditen. Für den Vektor der erwarteten Renditen μ wird zur Ermittlung der Portfoliogewichte mit (2) zum einen der historische Mittelwertvektor der Renditen μ_{hist} und zum anderen der Vektor der gleichgewichtigen Renditen Π eingesetzt. Für den letzteren Vektor resultiert natürlich wiederum unmittelbar die Zusammensetzung des „Marktportfolios“ aus den 19 Aktien. Allen Gewichtsrechnungen liegt die historische Varianz-Kovarianzmatrix der Renditen zugrunde. Bei den Gewichtsrechnungen wird davon ausgegangen, dass Leerverkäufe in allen Wertpapieren zugelassen sind.²³



²⁰ Die Daten stammen von Thomson Financial Datastream. Vgl. für die Aktien Tabelle 6.1 im Anhang.

²¹ Die Varianz-Kovarianzmatrix wird somit auf Basis der letzten 35 Zeitpunkte in jedem Zeitpunkt neu berechnet. Dasselbe gilt für die historischen Mittelwerte. Aufgrund einer sonst zu geringen Aktienanzahl beginnt der Untersuchungszeitraum nicht früher als 1999. Die Aktien, die für die Optimierung genutzt wurden sind im Anhang aufgeführt.

²² Für die gesamte empirische Untersuchung wurde der Risikoaversionsparameter nach Drobetz (2003) auf Eins festgelegt – das impliziert einen Investor mit einer logarithmischen Nutzenfunktion, der sein gesamtes Vermögen in das Marktportfolio investiert. Der Parameter τ wird auf 0,03 festgelegt, das entspricht etwa der Renditehistorie von 35 Monaten: $1/35 \approx 0,03$ im Rahmen einer Bayesianischen Herleitung des Black-Litterman-Verfahrens. Für eine Sensitivitätsanalyse bezüglich der Parameter vgl. Drobetz (2003). Weiterhin beziehen sich alle folgenden Abbildungen auf den Zeitpunkt 1.07.2004, also das letzte Datum, für das Daten zur Verfügung gestanden haben.

²³ Weiterhin weicht die Summe der Portfoliogewichte auch von Eins ab. Das Gewicht der risikolosen Anlage ergibt sich aus der Differenz zwischen Eins und der Summe der Aktiengewichte. Vgl. Kempf/Memmel (2003), S. 520, Drobetz (2003), S. 231.

Abbildung 4.1: Renditen im Gleichgewicht und im historischen Durchschnitt

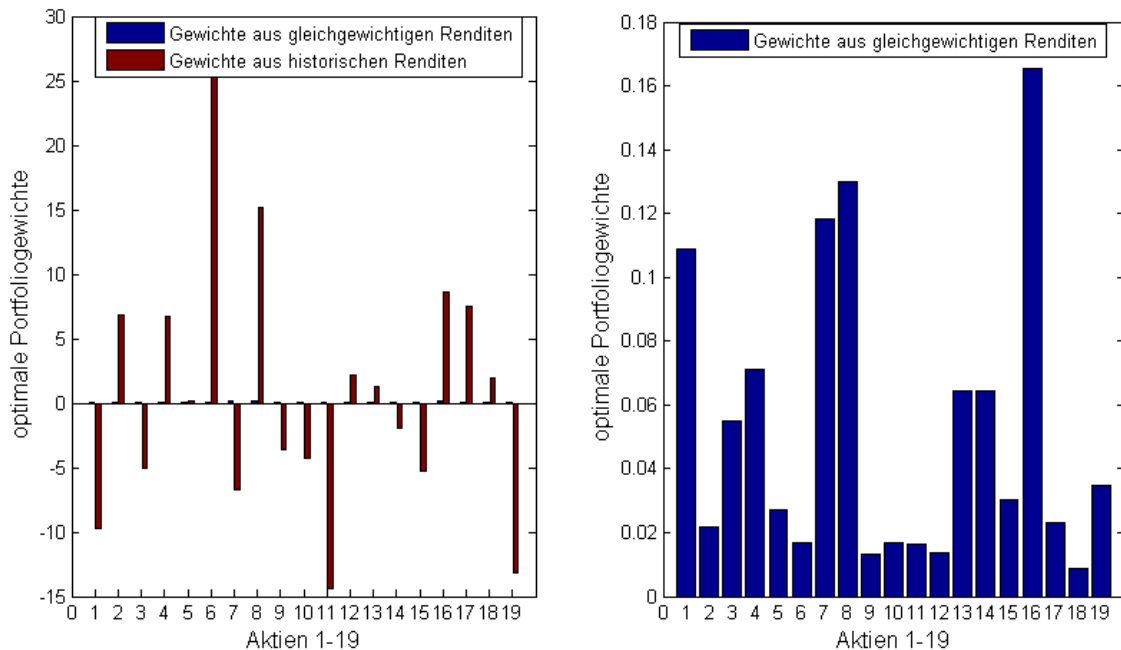


Abbildung 4.2: Optimale Portfoliogewichte bei Nutzung von gleichgewichtigen und historischen Renditen

Die optimalen Portfoliogewichte, die aus dem historischen Vektor der Renditen resultieren, sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Die zweite Grafik zeigt ausschließlich die Marktgewichte, da man diese im Maßstab der ersten Grafik kaum unterscheiden kann. Es ergeben sich extreme Gewichte bei Nutzung von historischen Renditen von ca. -15 bis 25, wohingegen die Marktgewichte konstruktionsbedingt alle positiv sind und sich zu Eins addieren. Die Handlungsempfehlung bezüglich der optimalen Allokation mit historischen Renditen würde wohl kein Investor, selbst beim Vorhandensein der Möglichkeit zu Leerverkäufen, aufgrund der betragsmäßig hohen Gewichte realisieren.

In Abbildung 4.3 werden die Prognoserenditen für das Black-Litterman-Verfahren dargestellt. Die blauen Balken stellen die erwartete Rendite aus dem Dividendendiskontierungsmodell dar, die aus den niedrigsten Dividendenprognosen der Analysten D_{lo} mit einer Wachstumsrate von 2 % berechnet werden. Die roten Balken stellen die erwartete Rendite dar, die aus den höchsten Dividendenprognosen der Analysten D_{hi} mit einer Wachstumsrate von 5 % berechnet werden.

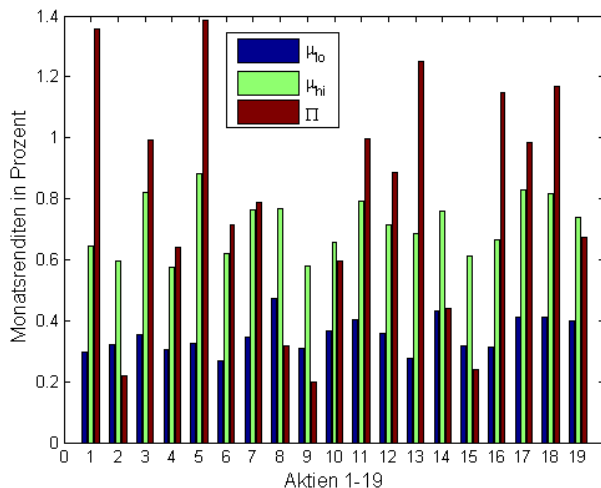


Abbildung 4.3: niedrigste und höchste erwartete Rendite aus dem Dividendendiskontierungsmodell und gleichgewichtige Marktrendite mit $g_{lo} = 2\%$, $g_{hi} = 5\%$

In der Literatur werden verschiedene Wachstumsraten für die Berechnung von Endwerten verwendet. Die Inflationsrate oder auch die Wachstumsrate des Bruttonationaleinkommens dient beispielsweise als Schätzung für die Wachstumsrate von Dividenden.²⁴ In der späteren out-of-sample Performanceuntersuchung wird für die Berechnung der unteren Schranke der Renditeberechnung $\mu_{i,lo}^{(t)}$ eine niedrige Wachstumsrate g_{lo} von ein, zwei oder drei Prozent und für die Berechnung der oberen Renditeschranke $\mu_{i,hi}^{(t)}$ eine hohe Wachstumsrate von vier, fünf oder sechs Prozent zugrunde gelegt. Diese Wachstumsraten sind ökonomisch plausibel und dienen in allen möglichen Kombinationen als Inputparameter für das beschriebene Verfahren, um die Sensitivität bzgl. der Wachstumsraten zu untersuchen.

Abbildung 4.4 zeigt die Histogramme der Anzahlen an Analystenschätzungen für die Schätzungen $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ und $D^{(3)}$. Die maximale Anzahl an Analystenschätzungen über den gesamten Zeitraum und über alle Aktien hinweg beträgt 45, die minimale Anzahl beträgt eins. Für das Histogramm stehen Daten von 19 Aktien über einen Zeitraum von 67 Monaten zur Verfügung, also insgesamt 1273 Werte. In 400 der 1273 Fälle wurden ca. 30 Analystenschätzungen für das erste Jahr abgegeben, in nur noch 25 Fällen wurden 30 Analystenschätzungen für das dritte kommende Jahr abgegeben. Die Anzahl an Schätzungen nimmt somit deutlich ab, je ferner die Schätzperiode ist.

²⁴ Vgl. beispielsweise Wallmeier (2005), S. 141, Stotz (2004), S. 191.

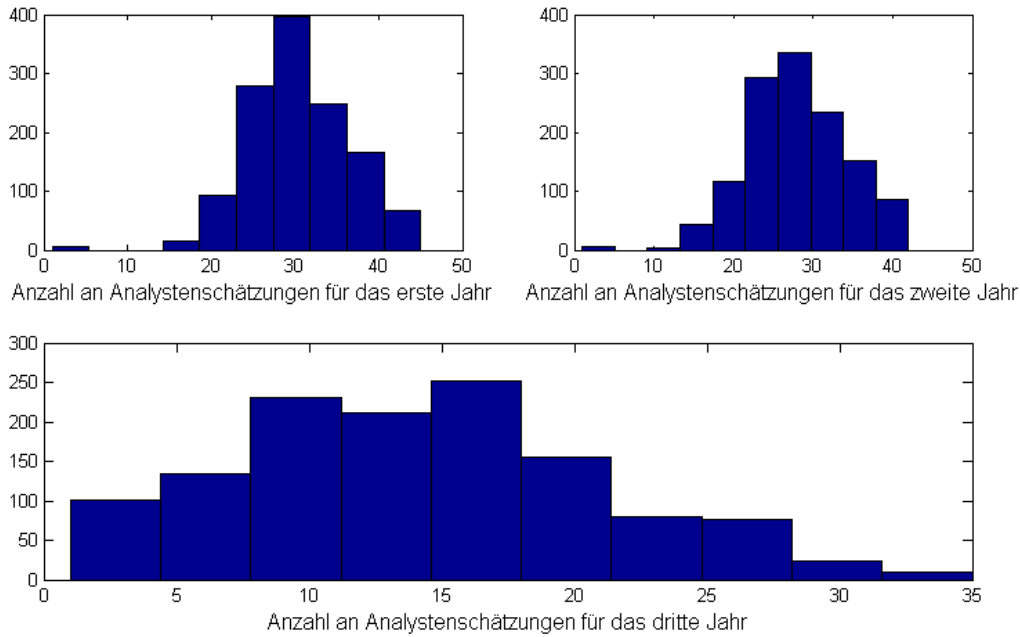


Abbildung 4.4: Histogramm der Anzahl an Analystenschätzungen über alle 19 Aktien

Abbildung 4.5 zeigt einen Überblick über die Eingangsparameter der Berechnung der prognosebedingten erwarteten Black-Litterman-Rendite μ_{BL} nach (10) für den 1.07.2004. Die erste Grafik zeigt die Renditedifferenz $\mu_{hi} - \mu_{lo}$, die in die Berechnung der Prognosestandardabweichung nach (26) eingeht. Je höher diese Renditedifferenz ist, desto größer ist die Standardabweichung der Prognose. Die Renditedifferenzen wurden auf Basis der Wachstumsraten von 1 % und 6 % berechnet und liegen alle zwischen 0,4 % und 0,72 % monatlich. Die zweite Grafik zeigt die Anzahl an Analystenschätzungen der Dividendenprognose für das dritte kommende Jahr, die zur Berechnung der Konfidenzwahrscheinlichkeit der Prognose herangezogen wird. Der hier unterstellte Zusammenhang, dass eine höhere Anzahl an Analystenschätzungen mit einer höheren Konfidenzwahrscheinlichkeit der Prognose einhergeht, impliziert weiterhin, dass eine höhere Anzahl an Analystenschätzungen auch in einer niedrigeren Standardabweichung der Prognose mündet. Die höchste Anzahl an Analystenschätzungen hat Aktie 8 mit 23 Schätzungen, die niedrigste Anzahl wurden für Aktie 11 mit 7 Schätzungen abgegeben. Die dritte Grafik in Abbildung 4.5 stellt die Standardabweichungen der Prognose-Varianz-Kovarianzmatrix Ω dar. Aktie 8 hat die geringste Standardabweichung, die vor allem aus der hohen Anzahl an Analystenschätzungen (23) resultiert.

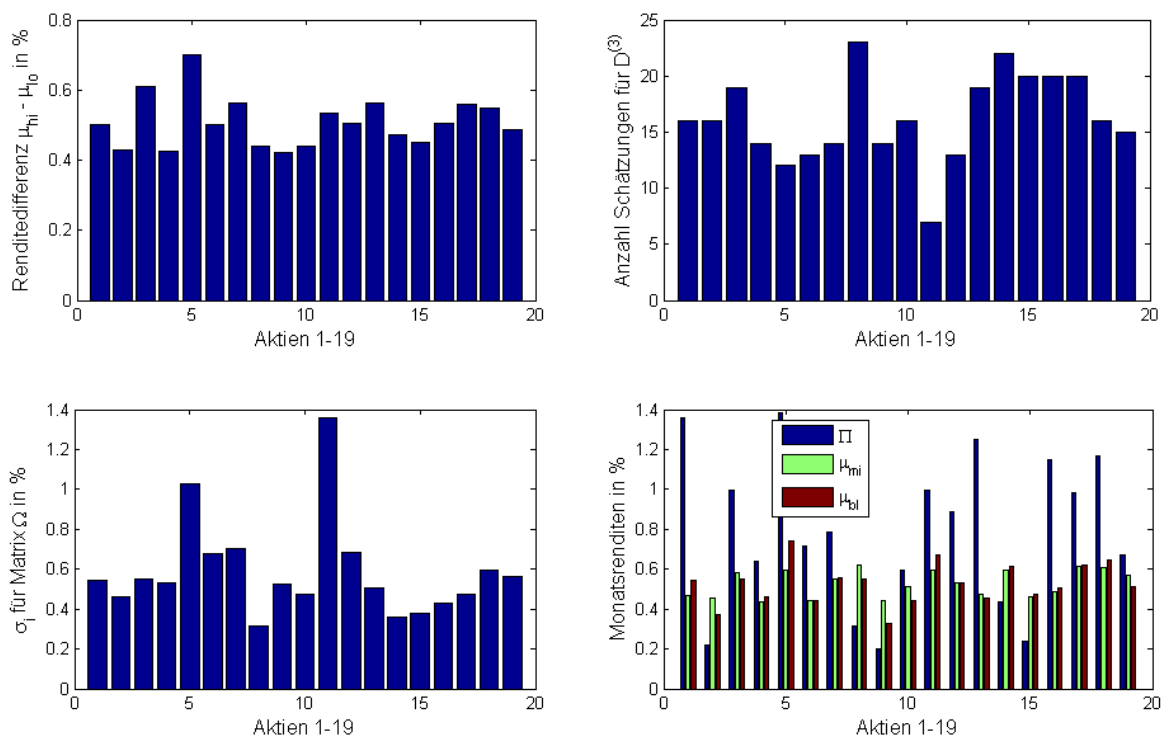


Abbildung 4.5: Übersicht über Renditen im Black-Litterman-Verfahren

Aktie 11 hingegen hat die höchste Standardabweichung der Prognose. Dort ist die Anzahl an Analystenschätzungen mit 7 Schätzungen am geringsten. Grafik 4 zeigt die gleichgewichtigen Renditen Π , die mittlere Rendite aus den Dividendenprognosen $\mu_{mi} = (\mu_{hi} + \mu_{lo})/2$ für den Vektor Q in (7) und die erwartete BL-Rendite μ_{BL} , die aus den beiden vorhergehenden Renditen nach (10) berechnet wird. Man kann erkennen, dass die erwarteten BL-Renditen tendenziell näher an den Prognoserenditen aus den Dividenschätzungen der Analysten sind. Aktien 5 und 11 haben eine relativ hohe Standardabweichung, die sich auch in der größeren Abweichung zwischen der Prognose- und BL-Rendite widerspiegelt. Aber die Höhe der Standardabweichung weist nicht zwangsläufig auf die Abweichung hin. Die BL-Rendite der Aktie 6 entspricht beispielsweise nahezu der Prognoserendite, obwohl eine höhere Standardabweichung vorliegt als bei Aktie 8, bei der die Renditedifferenz eindeutig größer ist. Die Begründung liegt in den Abhängigkeiten zwischen den Aktien, die in Form der Varianz-Kovarianzmatrix der Renditen Σ bei der Berechnung der BL-Rendite eingehen.

Mit den BL-Renditen μ_{BL} werden nun die optimalen Portfoliogewichte aus (2) berechnet. Die BL-Gewichte sind in Abbildung 4.6 mit roten Balken dargestellt und werden den Marktgewichten (blaue Balken) und den Gewichten, die man erhält, wenn man die „reinen“ Dividen-

denprognosen μ_{mi} einsetzt (grüne Balken), gegenübergestellt. Die Gewichte des Black-Litterman-Verfahrens sind weitaus ausgeglichener als die reinen Dividendengewichte.

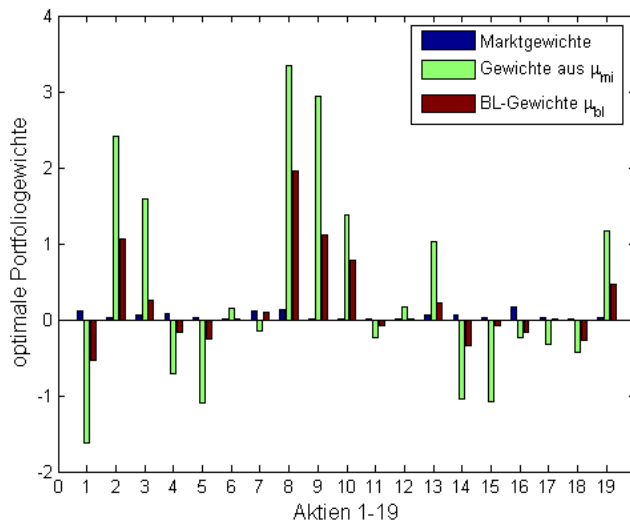


Abbildung 4.6: Optimale Portfoliogewichte der 19 Aktien

Auch wenn die erwarteten Black-Litterman-Renditen in geringerem Maße von den Prognoserenditen abweichen (vgl. Abbildung 4.5), so ist das bei den Gewichten nicht festzustellen. Die Gewichte auf Basis von μ_{BL} liegen bis auf Aktie 6 vollständig zwischen den Marktgewichten und den „Dividendengewichten“ auf Basis der Analystenschätzungen. Bei den 19 Aktien ist es ausgeglichen in welche Richtung die Aktiengewichte tendieren – beispielsweise sind die Gewichte von Aktien 3, 13 und 15 den Marktgewichten recht nahe, die der Aktien 2, 8 und 10 tendieren eher zu den Dividendengewichten. Alles in allem kann man sagen, dass die Gewichte bei weitem nicht so extrem wie die optimalen Gewichte bei Nutzung von historischen Renditeschätzungen (vgl. Abbildung 4.2) sind.

4.2 Untersuchung der Monte-Carlo-Methode

Die Abbildung 4.7 zeigt die verschiedenen berechneten Standardabweichungen der Varianz-Kovarianzmatrix der Prognosen Ω . Die blauen Balken der ersten Grafik stellen die Standardabweichungen auf Basis der Anzahl an Analystenschätzungen dar und die roten Balken stellen die auf Grundlage der Monte-Carlo-Methode berechneten Standardabweichungen dar. Die letzteren sind weitaus geringer als die Standardabweichungen der Prognosen, die anhand der Anzahl an Dividendenschätzungen gebildet werden. Weiterhin liegen die Differenzen zwischen den Standardabweichungen der einzelnen Aktien mit der Monte-Carlo-Methode weitaus geringer gegenüber der ersten Methode der Berechnung der Standardabweichungen vor. Es gibt damit nur noch geringe Unterschiede in den Konfidenzwahrscheinlichkeiten der Akti-

enprognosen. Ferner wird den Prognosen mit den niedrigeren Standardabweichungen eine höhere Gewichtung in der Berechnung der erwarteten BL-Rendite gegeben und die Gewichte weichen somit stärker von den Marktgewichten ab. Die in der zweiten Grafik von Abbildung 4.7 mit grünen Balken dargestellten optimalen Portfoliogewichte auf Basis der Monte-Carlo-Simulation sind betragsmäßig stets größer als die mit den blauen Balken dargestellten Gewichte auf Basis der Anzahl der Analystenschätzungen.

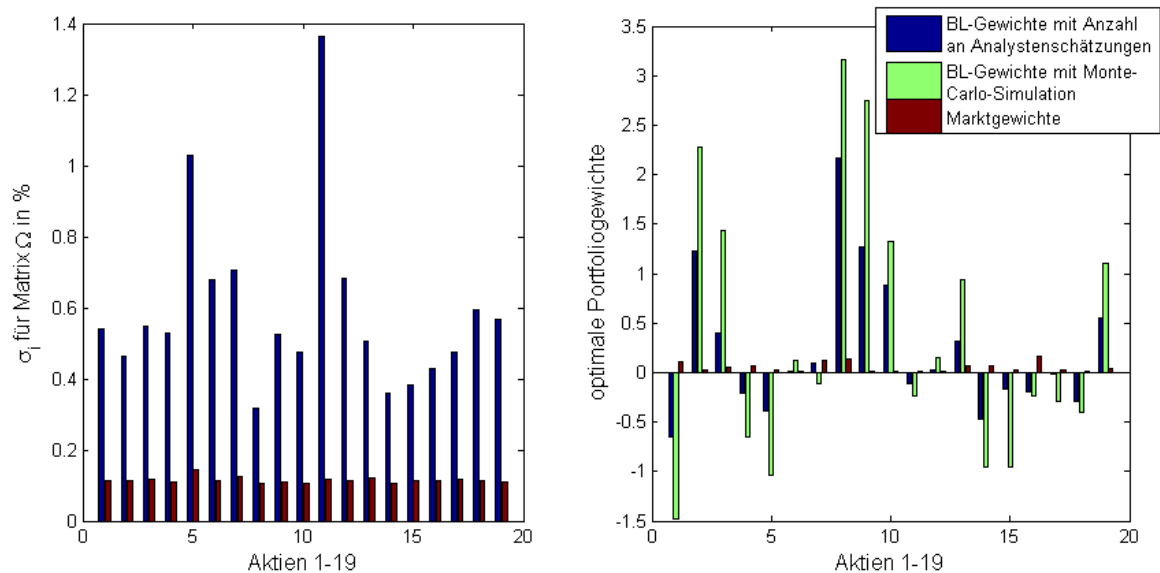


Abbildung 4.7: Standardabweichung von Ω mit verschiedenen Verfahren und resultierende optimale Portfoliogewichte

Die Performance der beiden verschiedenen Methoden zur Berechnung der Varianz-Kovarianzmatrix Ω und daraus schließlich der BL-Renditen, wird im folgenden Abschnitt mit der Performance der historischen Strategie und dem einfachen Halten des Marktportfolios verglichen.

4.3 Performancemessung der verschiedenen Strategien

Für die Performancemessung werden in einem rollierenden Verfahren vom 1.01.1999 bis zum 1.06.2004 monatliche out-of-sample Renditen berechnet. Dafür wird davon ausgegangen, dass bis zu einem bestimmten Zeitpunkt t nur die vergangenen und aktuellen Daten der Zeitpunkte $t-s, \dots, t$, mit $s > 0$ bekannt sind. Auf Basis dieser Informationen werden die erwarteten Renditen zum Zeitpunkt t für die folgenden fünf Strategien bestimmt:

- historische erwartete Renditen μ_{hist}
- gleichgewichtige Renditen μ_{markt}
- erwartete Renditen aus dem Dividendendiskontierungsmodell μ_{mi}

- BL-Renditen auf Basis der Anzahl an Analystenschätzungen $\mu_{BL,AS}$
- BL-Renditen auf Basis der Monte-Carlo-Methode $\mu_{BL,MC}$.

Der Durchschnitt der letzten 35 monatlichen realisierten Renditen einer Aktie i bildet beispielsweise die historische erwartete Rendite dieser Aktie. Das rollierende Verfahren wird grafisch in Abbildung 4.8 dargestellt.

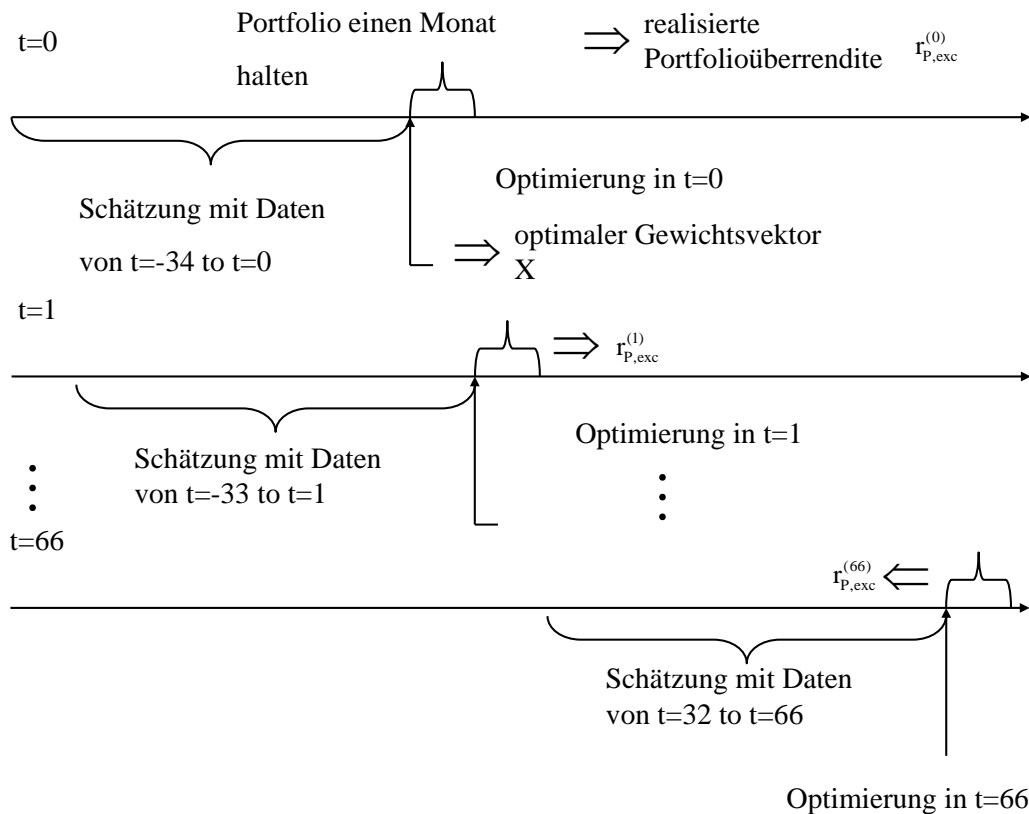


Abbildung 4.8: Rollierendes Verfahren zur Performancemessung

Die erwartete BL-Rendite wird wie oben beschrieben zu jedem Zeitpunkt t mit der aktuellen Information und den Analystenschätzungen zum Zeitpunkt t berechnet. Mit den verschiedenen erwarteten Renditen werden dann Gewichtsvektoren berechnet und diese Portfoliogewichte werden dann einen Monat vom Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt $t+1$ konstant gehalten. Zum Zeitpunkt $t+1$ werden die tatsächlich in diesem Monat aufgetretenen Aktienrenditen mit den jeweiligen Gewichtsvektoren multipliziert um zunächst die tatsächlich realisierte Portfoliorendite für die jeweilige Strategie in diesem Monat zu erhalten. Von dieser Rendite wird noch der risikolose Zinssatz abgezogen, um die Überrendite $\mu_{(exc)}$ für den Zeitraum von t bis $t+1$ zu erhalten. Als Performance-Maß für die jeweiligen Strategien wird der Sharpe-Quotient

zugrunde gelegt. Der Sharpe-Quotient setzt die durchschnittliche Überrendite zum relevanten Risiko $\sigma_{(exc)}$ ins Verhältnis:²⁵

$$\varphi_S = \mu_{(exc)} / \sigma_{(exc)}. \quad (22)$$

Um den Sharpe-Quotienten zu berechnen, werden der Mittelwert und die Standardabweichung der 66 Überschussrenditen vom 1.02.1999 bis zum 1.07.2004 ermittelt. Die Optimierung wurde mit verschiedenen plausiblen Wachstumsraten durchgeführt, um die Sensitivität diesbezüglich zu untersuchen. Weiterhin wurden verschiedene Optimierungen durchgeführt. Zunächst wird eine Optimierung ohne Leerverkaufsbeschränkungen durchgeführt und die Portfoliogewichte werden so realisiert wie diese sich ergeben (Optimierung 1). Bei der zweiten Optimierung, sind Leerverkäufe ebenfalls zugelassen, aber die Gewichte aus der Optimierung 1 werden auf Eins normiert, das heißt jedes Gewicht wird durch die Summe der Gewichte aller Aktien geteilt.²⁶ Darüber hinaus wurde ein Optimierungsalgorithmus angewendet, der optimale Portfoliogewichte mit Einhaltung von Leerverkaufsrestriktionen ($0 \leq X \leq 1$) und der Vollinvestitionsbedingung ermittelt ($\sum_{i=1}^N X_i = 1$) (Optimierung 3). Die Ergebnisse der drei Optimierungen sind in Tabelle 4.1 dargestellt.²⁷

| | | Optimierung 1 | | | Optimierung 2 | | | Optimierung 3 | | |
|-----------------------|--------|---------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| g_low | g_high | $\varphi_S^{(Div)}$ | $\varphi_S^{(BL,AS)}$ | $\varphi_S^{(BL,MC)}$ | $\varphi_S^{(Div)}$ | $\varphi_S^{(BL,AS)}$ | $\varphi_S^{(BL,MC)}$ | $\varphi_S^{(Div)}$ | $\varphi_S^{(BL,AS)}$ | $\varphi_S^{(BL,MC)}$ |
| 1 | 4 | 0,0913 | 0,1354 | 0,0895 | 0,1204 | 0,1222 | 0,1189 | 0,1850 | 0,1165 | 0,1795 |
| 1 | 5 | 0,0833 | 0,1315 | 0,0849 | 0,1164 | 0,1129 | 0,1168 | 0,1845 | 0,1029 | 0,1772 |
| 1 | 6 | 0,0757 | 0,1272 | 0,0816 | 0,1120 | 0,1044 | 0,1151 | 0,1842 | 0,0933 | 0,1751 |
| 2 | 4 | 0,0840 | 0,1262 | 0,0801 | 0,1178 | 0,1226 | 0,1141 | 0,1850 | 0,1286 | 0,1799 |
| 2 | 5 | 0,0764 | 0,1247 | 0,0747 | 0,1133 | 0,1136 | 0,1112 | 0,1846 | 0,1119 | 0,1779 |
| 2 | 6 | 0,0692 | 0,1214 | 0,0709 | 0,1087 | 0,1039 | 0,1084 | 0,1842 | 0,0985 | 0,1757 |
| 3 | 4 | 0,0772 | 0,1088 | 0,0716 | 0,1147 | 0,1168 | 0,1094 | 0,1850 | 0,1444 | 0,1802 |
| 3 | 5 | 0,0700 | 0,1151 | 0,0662 | 0,1100 | 0,1150 | 0,1062 | 0,1846 | 0,1274 | 0,1793 |
| 3 | 6 | 0,0632 | 0,1144 | 0,0618 | 0,1054 | 0,1055 | 0,1029 | 0,1842 | 0,1062 | 0,1770 |
| $\varphi_S^{(Hist)}$ | | 0,0362 | | | -0,1066 | | | 0,0508 | | |
| $\varphi_S^{(Markt)}$ | | -0,0141 | | | | | | | | |

Tabelle 4.1: Performance der BL-Strategien und der Dividendenstrategie im Vergleich

²⁵ Vgl. Breuer et al. (2004), S. 379 ff.

²⁶ Die Normierung der Gewichte auf Eins schlägt beispielsweise Drobetz (2003), S. 231 vor.

²⁷ Die Optimierung wurde mit einem Parameter $\tau = 0,03$ durchgeführt. Optimierungen mit einem anderen Parameter τ führen aber zu ähnlichen Ergebnissen. So ändert sich beispielsweise nichts an den Reihenfolgen der Performance der drei Optimierungen für ein τ von 0,3.

Der Sharpe-Quotient der „Marktstrategie“, also das Halten des Marktportfolios, ist negativ mit $\varphi_S^{(\text{Markt})} = -0,0141$, das heißt als durchschnittliche realisierte Rendite der Marktstrategie konnte noch nicht mal eine Rendite in Höhe der risikolosen Rendite erwirtschaftet werden.²⁸ Der Sharpe-Quotient der historischen Strategie $\varphi_S^{(\text{Hist})}$ ist für die zweite Optimierung ebenfalls negativ. In der Optimierung 1 ohne Nebenbedingungen schneidet das Black-Litterman-Verfahren mit der Anzahl an Analystenschätzungen am besten ab. Der Sharpe-Quotient $\varphi_S^{(\text{BL,AS})}$ liegt für alle Wachstumsraten hier zwischen 10,88 % und 13,54 %. Die bessere Performance liegt sicherlich an der Tatsache, dass den Prognosen durch die höheren Standardabweichungen nicht soviel Gewicht beigemessen wird und daher ausgewogenere Portfoliogewichte im Gegensatz zum „reinen“ Dividendenansatz resultieren. Die reine Dividendenstrategie und das Black-Litterman-Verfahren unter Anwendung der Monte-Carlo Simulation (BL-MC) weisen ähnliche Sharpe-Quotienten auf. Die Sharpe-Quotienten der reinen Dividendenstrategie $\varphi_S^{(\text{Div})}$ liegen zwischen 0,0632 und 0,0913 und die Sharpe-Quotienten von BL-MC liegen zwischen 0,0618 und 0,0895. Die Performance aller drei Verfahren liegt deutlich über der Performance der Marktstrategie oder der historischen Strategie.

Durch die Normierung der Portfoliogewichte auf eins (Optimierung 2) gibt es nicht mehr extreme Verkaufs- oder Kaufpositionen im Portfolio. Das kommt vor allem bei der Dividendenstrategie zum Tragen, weil dort die betragsmäßig größten Gewichte auftreten (vgl. Abschnitt 4.1). Die Normierung führt hier zu einer Verbesserung der Performance um ca. 4 %. Alle drei Verfahren liegen im Bereich des Sharpe-Quotienten von 10 % bis 13 %. In sechs der neun Kombinationen der Wachstumsraten hat das Black-Litterman-Verfahren mit der Anzahl an Analystenschätzungen (BL-AS) die beste Performance, in zwei Fällen das BL-MC Verfahren, und in einem Fall hat das reine Dividendenverfahren den höchsten Sharpe-Quotienten.

In der Optimierung 3 mit Leerverkaufsrestriktion und Vollinvestitionsbedingung hat das reine Dividendenverfahren stets die beste Performance mit einem Sharpe-Quotienten von ca. 18 %. Die Performance von BL-MC ist in allen Optimierungen sehr ähnlich zur reinen Dividendenstrategie, da die Prognosen im Black-Litterman-Verfahren mit einer niedrigen Standardabweichung eingehen, folglich diesen Prognosen ein hohes Gewicht beigemessen wird und somit die Gewichtsvektoren sehr ähnlich zum reinen Dividendenverfahren sind. Es lässt sich also zusammenfassen, dass ohne jegliche Berücksichtigung von Nebenbedingungen bei der

²⁸ Als risikoloser Zinssatz wurde hier der 1-Monats-FIBOR zugrunde gelegt.

Maximierung der Präferenzfunktion (1) das BL-AS Verfahren die beste Performance aufweist.²⁹ Bei der Normierung der Gewichte auf Eins (Optimierung 2) weist ebenso meist das BL-AS Verfahren die beste Performance auf, aber es gibt nicht so große Unterschiede wie in der ersten Optimierung. Optimiert man mit den Nebenbedingungen: keine Leerverkäufe und Vollinvestition (Optimierung 3), so erhält man mit dem reinen Dividendenverfahren die beste Performance.

5 Zusammenfassung

Für das Black-Litterman-Verfahren sind eigene Prognosen bezüglich erwarteter Renditen von Wertpapieren nötig, um von den allgemeinen Marktgewichten abzuweichen. Wenn keine eigenen Prognosen vorliegen, so bietet das Black-Litterman-Verfahren nicht die Möglichkeit aktives Portfoliomanagement zu betreiben. Weiterhin geben Analysten die Prognosen typischerweise nicht in der Form ab, die für die Aufstellung der Prognosematrix nach Black-Litterman notwendig ist. In diesem Beitrag wurden die Prognosen für das Black-Litterman-Verfahren auf der Basis des Dividendendiskontierungsmodells mit Hilfe von Analystenschätzungen erstellt. Es wurden zwei Möglichkeiten vorgestellt, die erwartete Rendite im Black-Litterman-Verfahren zu berechnen. Im ersten Fall wurde die Konfidenzwahrscheinlichkeit der Prognosen aus der Anzahl der von den Analysten abgegebenen Schätzungen bestimmt und im zweiten Fall wurde mit Hilfe der Verteilungsparameter der Analystenschätzungen eine Monte-Carlo Simulation durchgeführt um die Varianz-Kovarianzmatrix der Prognosen Ω zu ermitteln.

In einer empirischen Untersuchung wurden anhand von realen Kapitalmarktdaten erwartete Renditen und optimale Portfoliogewichte für die verschiedenen Strategien (Marktportfolio, historische Schätzer, Black-Litterman-Verfahren mit der Anzahl an Analystenschätzungen (BL-AS), Black-Litterman-Verfahren mit der Monte-Carlo Simulation (BL-MC), „reines“ Dividendenverfahren (Div)) berechnet. Ausgehend von den beiden unterschiedlichen Arten der Prognoseermittlung wurde die Wirkung des Black-Litterman-Verfahrens auf die Portfoliogewichte untersucht. Abschließend wurde eine out-of-sample Performanceanalyse über einen Zeitraum von 66 Monaten durchgeführt. Werden keine Nebenbedingungen bei der Maximierung der Präferenzfunktion berücksichtigt, so liefert das Black-Litterman-Verfahren mit

²⁹ Die bessere Performance ist leider nicht signifikant. Die Signifikanz wurde mit dem Test von Memmel (2003), der einen Fehler im Test von Jobson/Korkie (1981) aufdeckt, untersucht. Die Stärke des Tests ist allerdings nicht groß, so dass es schwer ist, eine signifikant bessere Performance nachzuweisen. Vgl. dazu Jobson/Korkie (1981), S. 900.

der Anzahl an Analystenschätzungen die mit Abstand beste Performance. Bei einer Optimierung mit Leerverkaufsbeschränkungen und Vollinvestitionsbedingung erreicht das Black-Litterman-Verfahren noch eine weitaus bessere Performance als die Marktstrategie oder die historische Strategie, allerdings weist die reine Dividendenstrategie noch einen höheren (allerdings nicht signifikanten) Sharpe-Quotienten auf.

6 Anhang

Zur Bestimmung eines Eintrags ω_{jj} der Varianz-Kovarianzmatrix Ω , der sich auf die Unsicherheit der j -ten Prognose bezieht, wird auf die Wahrscheinlichkeitsaussage des Investors zugegriffen. Sei etwa angenommen, dass der Investor mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % daran glaubt, dass die Differenz der erwarteten Renditen zwischen einem Portfolio A und einem Portfolio B zwischen 5 % und 7 % betragen wird. Dazu wird zunächst das 85 % Quantil³⁰ der Standardnormalverteilung in einer Quantilstabelle der Standardnormalverteilung nachgeschlagen,³¹ denn die Wahrscheinlichkeit von 70 % ist symmetrisch um die erwarteten Rendite von 0,06 verteilt und der rechte Rand dieses Konfidenzbereichs, ist derselbe Abszissenwert wie der 85 % Quantilwert der Standardnormalverteilung, wie man in Abbildung 6.1 erkennen kann. Somit erhält man die Begrenzungsstellen a und b der standardnormalverteilten³² Zufallsvariable Z für die gilt: $P(a \leq Z \leq b) = 70\%$. Der Wert des 85 % Quantils beträgt 1,036, demnach ist

$$P(-1,036 \leq Z \leq 1,036) = 70\%. \quad (23)$$

Die Renditeprognose r^P des Investors kann wie folgt formalisiert werden:

$$P(0,05 \leq r^P \leq 0,07) = 70\%. \quad (24)$$

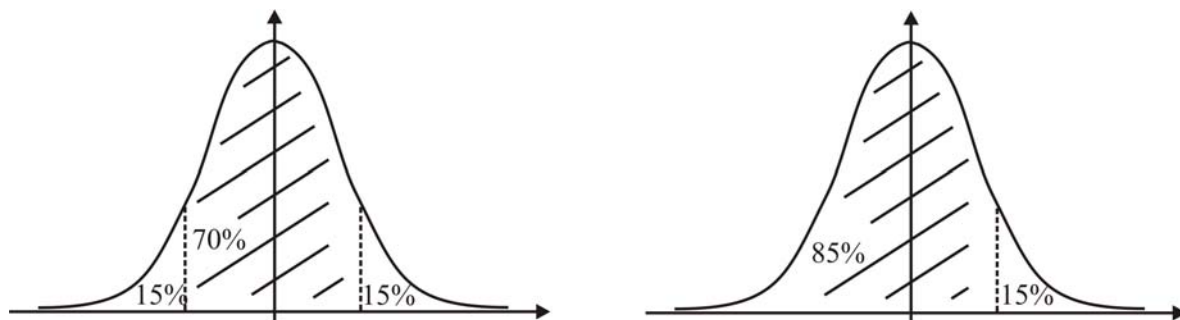


Abbildung 6.1: Quantile der Normalverteilung

Diese normalverteilte Zufallsvariable muss nun noch mit der standardnormalverteilten Zufallsvariable Z in Verbindung gebracht werden, damit eine Varianz für die Prognose ermittelt

³⁰ Das α Quantil bezeichnet die Stelle der Abzisse, an der die Verteilungsfunktion der standardnormalverteilten Zufallsvariable den Wert α annimmt. Vgl. Poddig et al. (2001), S. 185.

³¹ Quantilstabellen der Normalverteilung gibt es in zahlreichen Büchern der Statistik, vgl. z.B. Bosch (2005), S. 196.

³² Eine standardnormalverteilte Zufallsvariable hat den Erwartungswert Null und eine Varianz von Eins.

bar ist. Eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z resultiert aus einer normalverteilten Zufallsvariablen $r^P \sim N(\mu_r, \sigma_r^2)$, indem der Erwartungswert von der Zufallsvariablen r^P abgezogen und durch die Standardabweichung dividiert wird:

$$Z = \frac{r^P - \mu_r}{\sigma_r} \sim N(0,1). \quad (25)$$

Stellt man (25) nach r^P um und setzt dies in (24) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(0,05 \leq Z \cdot \sigma_r + \mu_r \leq 0,07) &= 70\% \\ \Leftrightarrow P\left(\frac{0,05 - \mu_r}{\sigma_r} \leq Z \leq \frac{0,07 - \mu_r}{\sigma_r}\right) &= 70\% \\ \Leftrightarrow P\left(\frac{-0,01}{\sigma_r} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma_r}\right) &= 70\% \end{aligned} \quad (26)$$

Vergleicht man dies wiederum mit (23), so folgt unmittelbar für die Standardabweichung der Renditeprognose:

$$\frac{0,01}{\sigma_r} = 1,036 \Leftrightarrow \sigma_r = 0,00965. \quad (27)$$

Um die Varianz auf der Diagonalen der Prognosefehlermatrix Ω einzutragen, wird dieser Wert noch quadriert.

| | | | |
|----|---------------|----|----------------|
| 1 | Allianz | 11 | Lufthansa |
| 2 | Altana | 12 | MAN |
| 3 | Bayer | 13 | Münchener Rück |
| 4 | BMW | 14 | RWE |
| 5 | Commerzbank | 15 | Schering |
| 6 | Continental | 16 | Siemens |
| 7 | Deutsche Bank | 17 | Thyssen Krupp |
| 8 | EON | 18 | TUI |
| 9 | Henkel | 19 | Volkswagen |
| 10 | Linde | | |

Tabelle 6.1: DAX-Aktien der empirischen Untersuchung

Literatur:

- Abarbanell, J./Bernard, V. (2000): Is the US stock market myopic?, in: Journal of accounting research, Vol. 38, S. 221-242.
- Anderson, R. L./Bancroft, T. A. (1952): Statistical theory in research, New York u.a.
- Black, F./Litterman, R. (1992): Global portfolio optimization, in: Financial analysts' journal, Vol. 48, S. 28-43.
- Breuer, W./Gürtler, M./Schumacher, F. (2004): Portfoliomanagement I, 2. Auflage, Wiesbaden.
- Bosch, K. (2005): Elementare Einführung in die angewandte Statistik, 8. Auflage, Wiesbaden.
- Botosan, C. A./Plumlee M. A. (2005): Assessing Alternative Proxies for the Expected Risk Premium, in: The accounting review, Vol. 80, S. 21-54.
- Brennan, M. J./Jegadeesh N./Swaminathan B. (1993): Investment Analysis and the Adjustment of Stock Prices to Common Information, in: The review of financial studies, Vol. 6, S.799-824.
- Chopra, V. K./Ziemba, W. T. (1993): The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice, in: The journal of portfolio management, Vol. 19, S. 6-12.
- Courteau, L./Kao, J. L./Richardson G. D. (2001): Equity valuation employing the ideal versus ad hoc terminal value expressions, in: Contemporary accounting research, Vol. 18, S. 625-662.
- Daske, H./Gebhardt, G./Klein, S. (2006): Estimating the expected cost of equity capital using analysts' consensus forecasts, in: Schmalenbach business review, Vol. 58, S.2-36.
- Drobtz, W. (2003): Einsatz des Black-Litterman-Verfahrens in der Asset Allocation, in: Dichtl, H./Kleeberg, J. M./Schlenger, C. (Hrsg.): Handbuch Asset Allocation: innovative Konzepte zur systematischen Portfolioplanung, Bad Soden/Ts., S. 203-239.
- Easton, P. D. (2004): PE Ratios, PEG Ratios, and Estimating the Implied Expected Rate of Return on Equity Capital, in: The accounting review, Vol. 79, S. 73-96.
- Elton, J. E. (1999): Expected return, realized return, and asset pricing tests, in: Journal of Finance, Vol. 54, S. 1199-1220.
- Fahrmeir, L./Künstler R./Pigeot, I./Tutz, G. (1997): Statistik, Berlin.
- Francis, J./Olsson, P./Oswald, D. R. (2000): Comparing the Accuracy and Explainability of Dividend, Free Cash Flow, and Abnormal Earnings Equity Value Estimates, in: Journal of accounting research, Vol. 38, S. 45-70.
- Freund, R. J. (1956): The Introduction of Risk into a Programming Model, in: Econometrica, Vol. 24, S. 253-263.
- Gebhardt, W. R./Lee, C. M. C./Swaminathan, B. (2001): Toward an Implied Cost of Capital, in: Journal of accounting research, Vol. 39, S. 135-176.
- Gode, D./Mohanram, P. (2003): Inferring the Cost of Capital Using the Ohlson-Juettner Model, in: Review of accounting studies, Vol. 8, S. 399-432.
- Gordon, M. J. (1959): Dividends, Earnings, and Stock Prices, Review of Economics and Statistics, Vol. 41, S. 99-105.
- Gordon, M. J. (1966): The Investment, Financing and Valuation of the Corporation, 2. Auflage, Homewood.
- He, G./Litterman R. (1999): The Intuition behind Black-Litterman Model Portfolios, Investment Management Research Paper, Goldman Sachs.
- Herold, U. (2003): Portfolio Construction with Qualitative Forecasts, in: The Journal of Portfolio Management, Vol. 30, S. 61-72.
- Herold, U. (2004): Asset Allocation und Prognoseunsicherheit, Bad Soden/Ts.
- Jobson, J. D./Korkie, B. M. (1981): Performance Hypothesis Testing with the Sharpe and Treynor Measure, in: The Journal of Finance, Vol. 36, S. 889-908.

- Jones, R. (2007): Equity Portfolio Management - The Black-Litterman Model for structured Equity Portfolios, in: *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 33, S. 24-33.
- Jorion, P. (1986): Bayes-Stein estimation for portfolio analysis, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 21, S. 279-292.
- Kempf A., Memmel C. (2002): Schätzrisiken in der Portfoliotheorie, in: Kleeberg J. M./Reh-kugler H. (Hrsg.): *Handbuch Portfoliomanagement*, Bad Soden/Ts., S. 893-919.
- Kempf A., Memmel C. (2003): Parameterschätzungen in der Portfoliotheorie: Ein analyti-scher und simulationsgestützter Vergleich, in: *Die Betriebswirtschaft*, Vol. 63, S. 516-531.
- Lindley, D. V./Smith A. F. M. (1972): Bayes estimates for the linear model, in: *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B* Vol. 34, S. 1-41.
- Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection, in: *Journal of Finance*, Vol. 7, S. 77-91.
- Markowitz, H. M. (1959): *Portfolio Selection*, New York u.a.
- Memmel, C. (2003): Performance Hypothesis Testing with the Sharpe Ratio, in: *Finance Let-ters*, Vol. 1, S. 21-23.
- Memmel, C. (2004): Schätzrisiken in der Portfoliotheorie: Auswirkungen und Möglichkeiten der Reduktion, Lohmar.
- Ohlson, J. A./Juettner-Nauroth, B. E. (2005): Expected EPS and EPS Growth as Determinant-sof Value, in: *Review of accounting studies*, Vol. 10, S. 349-366.
- Pitts, A. (1998): Asset Allokation und Markteinschätzung: die Synthese, in: Kutscher, C./Schwarz, G. (Hrsg.): *Aktives Portfolio Management: der Anlageentscheidungsprozeß von der Prognose bis zum Portfolio*, Zürich, S. 119-152.
- Poddig, T./Dichtl, H./Petersmeier, K. (2001): *Statistik, Ökonometrie, Optimierung: Methoden und ihre praktische Anwendungen in Finanzanalyse und Portfoliomanagement*, 2. Auf-lage, Bad Soden/Ts.
- Roll, R. (1977): A critique of the asset pricing theory's tests, in: *Journal of Financial Econom-ics*, Vol. 4, S. 129-176.
- Stotz, O. (2004): *Aktives Portfoliomanagement auf Basis von Fehlbewertungen in den Rendi-teerwartungen*, Berlin.
- Wallmeier, M. (2005): Analysts' earnings forecasts for DAX100 firms during the stock mar-ket boom of the 1990s, in: *Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 19, S. 131-151.
- Williams, J. B. (1938): *The Theory of Investment Value*, Cambridge.