

Statistische Modellierung extremer Finanzrisiken in Banken –
Analyse von Zahlungsstrom- und Marktpreisrisiken
mit der POT-Methode

Liquidity at Risk, Value at Risk,
Extremwertstatistik, POT-Methode,
Zahlungsstromrisiken, Marktpreisrisiken

6.11.2006

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Modellierung extremer Zahlungsstrom- und Marktpreisrisiken im Kontext des bankbetrieblichen Risikomanagements. Konkret werden der Nettofinanzierungsbedarf einer Bank im Konzept des Liquidity at Risk sowie Euro Stoxx 50-Tagesschlusskursrisiken im Konzept des Value at Risk mit der POT-Methode aus der Extremwertstatistik untersucht. Es wurde gezeigt, dass die POT-Methode sehr gute Approximationsergebnisse mit der verallgemeinerten Paretoverteilung (GPD) liefern kann und die Schätzung bisher nicht beobachteter Risikowerte ermöglicht. Im bankbetrieblichen Kontext ist diese Untersuchung relevant, weil viele Banken mit Gauss'schen Modellen arbeiten und hohe Risikowerte unterschätzen. Ein weiteres Ergebnis besteht darin, dass es in der Praxis sinnvoll ist, mehrere Methoden zur Schätzung der unbekanntenen GPD-Parameter heranzuziehen, insbesondere dann, wenn Entscheidungsträger eine möglichst gute Approximation des Verteilungsrandes der Risikogröße wünschen. In diesem Zusammenhang wurde herausgearbeitet, dass die Berechnung des RMSE im Verteilungsrand wertvolle Informationen über die Approximationsgüte liefern kann, insbesondere dann, wenn hohe Risikowerte von zentraler Bedeutung für das bankbetriebliche Risikomanagement sind.

1 Einleitung

Die wirksame und wirtschaftliche Bewältigung von Finanzrisiken spielt eine zentrale Rolle in einer ertragsorientierten Banksteuerung¹. Finanzrisiken beziehen sich unmittelbar auf die Finanzströme einer Bank und umfassen mit den Liquiditäts- sowie Erfolgsrisiken sämtliche Risiken des Wertbereichs einer Bank.² Begreift man Banken als Institutionen, die Intermediäre zwischen Kapitalangebot und Kapitalnachfrage sind, lässt sich das Risikomanagement aus Sicht des strategischen Bankmanagements neben Transaktions-, Führungs- und Infrastrukturkompetenzen als Transformationskompetenz einordnen, da Kreditinstitute eine Betrage-, Fristen- und Risikotransformation durchführen, die je nach Bankgeschäftszweck stärker vom commercial oder investment banking geprägt ist.³ Nach Schierenbeck stellen Liquidity at Risk bei Liquiditätsrisiken und Value at Risk bei Erfolgsrisiken zentrale Messkonzepte für das Risikopotential in Banken dar, das eng mit dem Risiko-Chancen-Kalkül und Risikotragfähigkeitskalkül verbunden ist; danach sollen Liquiditäts- und Erfolgsrisiken nur bei einem lohnenswerten Risiko-Chancen-Profil (Risiko-Chancen-Kalkül) übernommen werden, vorausgesetzt eine Bank kann die Risiken im Verlustfall tragen (Risikotragfähigkeitskalkül).⁴ In diesem Kontext stellen extreme Finanzrisiken eine besondere Herausforderung für das Risikomanagement dar.⁵ Borkovec und Klüppelberg verweisen bei Banken darauf, dass diese vorwiegend mit Gauss'schen Modellen arbeiten und damit hohe Risiken unterschätzen.⁶

¹ Zum Konzept einer ertragsorientierten Banksteuerung vgl. Schierenbeck, Henner (2000), S. 1447; Schierenbeck, Henner (2001b), S. 2; Bessis, Joel (1998), S. 25 f.

² Zur Abgrenzung der Finanzrisiken im Wertbereich von operationellen Risiken im Betriebsbereich und strategischen Risiken im geschäftspolitischen Bereich einer Bank vgl. Boos, Karl-Heinz/ Fischer, Reinfrid/ Schulte-Mattler, Hermann (2000) § 25a KWG Rn. 23; Büschgen, Hans E. (1998), S. 868 f.; Schierenbeck, Henner (2001a), S. 4 -8.

³ Zum Risikomanagement als bankbetriebliche Kernkompetenz vgl. Börner, Christoph J. (2000), S. 161-164, 219. Zum Begriff commercial bank vgl. Büschgen, Hans E. (1992), S. 330; Thießen, Friedrich (Hrsg.) (1999), S. 320, 114 f.; zum Begriff investment bank vgl. Büschgen, Hans E. (1992), S. 866; Thießen, Friedrich (Hrsg.) (1999), S. 1037, 114 f.

⁴ Vgl. Schierenbeck, Henner (2000), S. 1446.

⁵ "In estimating necessary levels of risk capital, the primary concern should be to address those disturbances that occasionally do stress institutional solvency - the negative tail of the loss distribution that is so central to modern risk management. As such, the incorporation of stress scenarios into formal risk modelling would seem to be of first-order importance. However, the incipient art of stress testing has yet to find formalization and uniformity across banks and securities dealers.... And although the results of the stress tests may be given to management, they are, to my knowledge, never entered into formal risk modelling process." Greenspan, Alan (2000), S. 2.

⁶ Vgl. Borkovec, Milan/ Klüppelberg, Claudia (2000), S. 2.

Die Bank für Internationalen Zahlungsausgleich sieht in der Extremwerttheorie (EVT) einen Lösungsansatz: *“...EVT is notable for being the only stress test technique that attempts to attach a probability to stress test results.”*⁷ Das Schrifttum ordnet die Extremwertstatistik der semiparametrischen Risikoanalyse zu: Sie überwindet die methodische Grenze der historischen Simulation, die zuverlässige Risikowerte nur im hoch frequentierten Teil der empirischen Verteilung schätzen kann, und der Normalverteilung, die hohe Risikowerte unterschätzt.⁸ Der semiparametrische Ansatz verwendet eine Extremwertverteilung als Prognoseverteilung für den künftigen Verlauf der Risikogröße im Verteilungsrand, wobei zur Risikoschätzung die theoretische Verteilungsannahme mit der besten Schätzung des empirischen Verteilungsrandes herangezogen werden soll.⁹ Die Peaks-Over-Threshold (POT)-Methode beruht auf der Extremwerttheorie und hat sich als fortschrittliche Methode zur Schätzung großer sowie bisher noch nicht beobachteter Risikowerte etabliert; sie arbeitet mit der verallgemeinerten Paretoverteilung (GPD), die aus den Naturwissenschaften kommt und vor allem in der Versicherungsmathematik zur Schätzung bisher noch nicht beobachteter Schäden angewendet wird.¹⁰

Die EZB kennzeichnet das Problem der Quantifizierung extremer Liquiditätsrisiken in Banken wie folgt: *“In the area of market-risk, the value-at-risk (VaR) concept has become the industry standard, and VaR is now widely accepted by bank supervisors as a technique for calculating regulatory capital requirements. There is still no such mechanism for liquidity risk, although some of the major banks are working on probabilistic liquidity-at-risk models, with the parallel aim of replacing supervisory liquidity ratios with a set of requirements on the basis of such models. However, these still seem to be at an early stage of development.”*¹¹ *“Complicating factors in liquidity modelling are that a normal distribution cannot be assumed for cash flows and that historical data do not adequately capture the stress-dimension of liquidity risk.”*¹² Dies wirft die erste Frage auf, wie extreme Liquiditätsrisiken in einer Bank modelliert werden können.

⁷ Bank for International Settlements Committee on the Global Financial System (2000), S. 7.

⁸ Vgl. stellvertretend das EZB-Arbeitspapier von Manganelli, Simone/ Engel, Robert F. (2001), S. 7 ff.

⁹ Zur Goodness-of-Fit-Analyse von Extremwertverteilungen vgl. stellvertretend Longin, François (2000), S. 1103 f.; Gumbel, Emil Julius (1958), S. 35.

¹⁰ Vgl. z. B. McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1997), S. 19 sowie weiterführend mit Implikationen für das Risikomanagement z. B. Malevergne, Yannick/ Sornette, Didier (2006), S. 78 f.

¹¹ Europäische Zentralbank (2002), S. 29.

¹² Europäische Zentralbank (2002), S. 29.

Für Aktienkursrisiken liegen viele wertvolle Analysen extremer Risiken mit Hilfe der Extremwertstatistik vor; sie verwenden vor allem die ML-Methode.¹³ Unbeschadet dessen zeigen Bobée, Ashkar, Hosking, Wallis, Wood, Castillo in den Naturwissenschaften den Einfluss unterschiedlicher Parameterschätzmethoden bei der Approximationsgüte von Extremwertverteilungen auf.¹⁴ Diese Arbeiten legen als zweite Fragestellung nahe, den in den Naturwissenschaften beobachteten Einfluss von Parameterschätzmethoden auf die Risikoanalyse im Verteilungsrand von Aktien zu untersuchen. Die Untersuchung soll anhand des Euro Stoxx 50, dem wichtigsten Aktienindex im Euro-Raum, erfolgen.

Das vorliegende Papier liefert Antworten auf die beiden aufgeworfenen Fragen: Es zeigt bei der Erforschung des Liquidity at Risk, wie mit Hilfe der POT-Methode bei Anwendung unterschiedlicher Parameterschätzmethoden extreme Zahlungsstromrisiken sowie Marktpreisrisiken approximiert und geschätzt werden können. Empirisch ist bemerkenswert, dass die ML-Methode bei den untersuchten Daten nicht die besten Approximationen in den Stichproben geliefert hat; dies steht im Einklang mit den oben angesprochenen Ergebnissen von Bobée, Ashkar, Hosking, Wallis, Wood, Castillo aus den Naturwissenschaften. Für die praktische Modellierung bedeutet dies, dass es sinnvoll ist, mehrere Parameterschätzmethoden anzuwenden. Es wird gezeigt, dass sich die Methode der kleinsten Quadrate (OLS) für Simulationen gut eignet. Möchte der Entscheidungsträger die POT-Methode in Anlehnung an Embrechts et al.¹⁵ ausschließlich zur Risikoschätzung außerhalb des bisher beobachteten Wertebereichs der Stichprobe heranziehen, ist die OLS-Methode flexibel um eine Nebenbedingung erweiterbar, wonach die Risikoschätzung mit der GPD den größten beobachteten Risikowert exakt mit dem entsprechenden theoretischen Quantil schätzt (OLS; GPD = MAX_{emp}).

Die Untersuchung der Approximationsgüte der unterschiedlichen Parameterschätzmethoden konzentriert sich auf den im Schrifttum bei goodness-of-fit-Analysen weit verbreiteten

¹³ Vgl. z. B. Reiss, Rolf-Dieter/ Thomas, Michael (2001), S. 310-338 und die dort angegebene weiterführende Literatur.

¹⁴ Bobée, Ashkar beschreiben dieses Problem in der Extremwertstatistik wie folgt: "The example shows that differences resulting from using two different methods of parameter estimation for the same distribution can be more important than differences resulting from using two different distributions... ." Bobée, Bernard/ Ashkar, Fahim (1988), S. 908. Vgl. Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R./ Wood, E. F. (1985), S. 251 f.; Castillo, Enrique (1994), S. 31.

¹⁵ "By combining both, GPD above u and empirical df [density function; Anmerkung des Verfassers] below u , a good overall fit can be obtained. There are of course various possibilities to fine-tune such a construction." Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 359.

RMSE, der die Wurzel aus der durchschnittlichen quadrierten Abweichung zwischen allen betrachteten empirischen und den entsprechenden theoretischen Quantilen beschreibt. Daher erscheint es mit Blick auf das Untersuchungsziel in Anlehnung an oben genannte Arbeiten von Bobée, Ashkar, Hosking, Wallis, Wood, Castillo vertretbar, dass in diesem Papier auf die Analyse der Konfidenzintervalle verzichtet wird, zumal die Konstruktion von Konfidenzintervallen in der Praxis kaum verifizierbar ist.¹⁶

Die Arbeit trägt zu den folgenden Literaturreichtungen bei: Erstens erweitert sie die Literatur zur Risikoschätzung von Zahlungsstromrisiken für die Steuerung der jederzeitigen Zahlungsbereitschaft einer Bank.¹⁷ Sie verwendet den in Zeranski¹⁸ vorgestellten Datensatz über Zahlungsstromschwankungen einer Regionalbank und stellt unbeschadet dessen die dort erarbeiteten Ergebnisse mit etwas verbesserten Approximationsergebnissen vor. In diesem Papier wurde eine andere Auswahl der Schwelle zugrunde gelegt, d. h., anstelle der grafischen Ableitung der Schwelle aus dem Sample Mean Excess Plot wurden hier zu allen Schwellenwerten mit Hilfe der OLS-Methode die unbekanntes GPD-Parameter geschätzt und anschließend der RMSE als goodness-of-fit-Kriterium berechnet. Die besten Modelle sortiert nach RMSE sind als Tabelle angegeben und der Lösung mit dem aus dem Sample Mean Excess (SME)-Plot abgeleiteten Schwellenwert für die OLS-Methode gegenübergestellt. Damit liefert diese Arbeit zweitens einen Beitrag zur Literatur über die Modellierung von Extremwerten mit der POT-Methode, die für die Auswahl von Schwellenwerten auf den Sample Mean Excess Plot zurückgreifen.¹⁹ Die dritte für dieses Papier relevante Literaturreichtung beschäftigt sich mit der Analyse

¹⁶ "At various stages throughout the text we hinted at the fact that extreme value theory (EVT) offers methodology allowing for extrapolation outside the range of the available data. ... The statistical reliability of these estimates becomes, as we have seen, very difficult to judge in general. Though we can work out approximate confidence intervals for these estimators, such constructions strongly rely on mathematical assumptions which are unverifiable in practice." Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 364.

¹⁷ Vgl. z. B. Eilenberger, Guido (1996), S. 178; Meyer zu Selhausen, Hermann (1995), Sp. 1390; Zuber, Christof (1987), S. 140; Wittgen, Robert/ Eilenberger, Udo (1984), S. 219 f.; Wilkens, Klaus (1975), S. 210 sowie in einer Zusammenschau Zeranski, Stefan (2005), S. 11-62.

¹⁸ Zu den Daten vgl. Zeranski, Stefan (2005), Anhang; zur OLS-Methode vgl. a.a.O., S. 165.

¹⁹ Zur Verwendung des SME-Plot als Hilfsmittel zur Ableitung eines Schwellenwertes vgl. z. B. Küllezi, Evis/ Gilli, Manfred (2000), S. 13 f.; Severin, Martin (2002), S. 6. " ... *One method which is of immediate use in practice is based on the linearity of the mean excess function $e(u)$ for the GPD. ... choose $u > 0$ such that $e_n(u)$ is approximately linear for $x \geq u$. The key difficulty of course lies in the interpretation of approximately. Only practice can tell! One often observes a change in the slope of $e_n(u)$ for some value of u .*" Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 355 f.

extremer Aktienkursrisiken.²⁰ Unbeschadet dieser wertvollen Arbeiten unterscheidet sich dieses Papier dadurch, dass die GPD-Approximationen neben der ML- sowie PWM-Methode auch mit der OLS-Methode geschätzt werden. Empirisch interessant ist, dass die PWM-Methode im Unterschied zu den Zahlungsstromrisiken hier nicht besser als die ML-Methode abschneidet, wobei die OLS-Methode insgesamt bei dem untersuchten Schwellenwert den geringsten RMSE aufweist. Zur Objektivierung dieses Vergleichs wurde der Schwellenwert anhand des SME-Plots ausgewählt.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Der Abschnitt 2 behandelt die Risikoanalyse mit der POT-Methode. Die POT-Methode wird im Schrifttum vor allem von Borkovec, Coles, Embrechts, Emmer, Klüppelberg, McNeil, Resnick, Saladin, Samorodnitsky, Severin und Trüstedt ausführlich erläutert.²¹ Dort können Beweise sowie ausführliche Herleitungen von Ergebnissen der Extremwerttheorie, welche die POT-Methode betreffen, nachgelesen werden, die anhand von Beispielen zur Risikoschätzung fundiert sind. Vor diesem Hintergrund konzentriert sich Abschnitt 2 auf die Vorstellung der Ergebnisse der Extremwerttheorie, die zur Analyse extremer Finanzrisiken mit der POT-Methode benötigt werden. Abschnitt 3 beschreibt die Datensätze, die zur Analyse der Zahlungsstrom- und Marktpreisrisiken herangezogen werden. Abschnitt 4 beinhaltet die empirischen Untersuchungsergebnisse für die POT-Methode, differenziert nach den Parameterschätzmethoden ML, PWM, OLS, OLS-NB, wobei im Unterabschnitt 1 die Ergebnisse für die Zahlungsstromrisiken einer Regionalbank und im Unterabschnitt 2 die Resultate für die Marktpreisrisiken bei Aktienkursrisiken anhand des Euro Stoxx 50 gezeigt werden. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung im Abschnitt 5.

2 Risikoanalyse mit der POT-Methode

Die Extremwerttheorie beschreibt das Verhalten der größten Werte einer Zeitreihe oder der Exzedenten über einer Schwelle. Die klassische Extremwerttheorie beruht auf den beiden

²⁰ Vgl. z. B. Berge, Klaus/ Fröhlich, Stefan/ Locarek-Junge, Hermann (2006), S. 184 f.; Emmer, Susanne/ Klüppelberg, Claudia/ Trüstedt, Matthias (1998), McNeil, Alexander (1997b).

²¹ Zur POT-Methode vgl. Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 352 f.; McNeil, Alexander (1997a), S. 118 f.; Embrechts, Paul/ Resnick, Sidney/ Samorodnitsky, Gennady (1998), S. 4 f.; Emmer, Susanne/ Klüppelberg, Claudia/ Trüstedt, Matthias (1998), S. 4 f.; McNeil, Alexander (1999), S. 3 f.; Coles, Stuart (2001), S. 74 f.;

zentralen Konvergenzsätzen von Fisher-Tippett und Pickands-Balkema-de Haan.²² Diese Konvergenzsätze sind für alle bekannten Verteilungsfamilien gültig.²³

Im Schrifttum wird die Anwendungsperspektive wie folgt skizziert: *“Estimation of high quantiles (such as $q_{0.99}$ and $q_{0.999}$) of an unknown distribution from datasets of several hundred or several thousand observations is an inherently difficult problem. The POT method is a theoretically well supported technique for fitting a parametric distribution to the tail of an unknown underlying distribution and reading off quantile estimates from the fitted curve. The POT method is to our knowledge the best parametric method available for this estimation problem.”*²⁴ *“In summary one can say that EVT does not predict the future with certainty; in no way should the story have suggested this. It is more the case that EVT provides sensible natural models for extreme phenomena and a framework for assessing the uncertainty which surrounds rare events. In finance these models could be pressed into service as benchmarks for measuring risk.”*²⁵

Die POT-Methode beruht auf dem Theorem von Pickands, Balkema, de Haan, wonach die Werte über einer Schwelle (Exzessverteilung) bei genügend groß gewählter Schwelle gegen die verallgemeinerte Paretoverteilung (generalized pareto distribution, GPD) konvergieren.²⁶ Die verallgemeinerte Paretoverteilung ist gegeben durch

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi} & \text{falls } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-x / \beta) & \text{falls } \xi = 0, \end{cases}$$

mit $x \geq 0$, wenn $\xi \geq 0$,
 $0 \leq x \leq -\beta / \xi$, wenn $\xi < 0$,

wobei der Skalenparameter $\beta > 0$ ist.²⁷

²² Vgl. Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 164 ; Borkovec, Milan/ Klüppelberg, Claudia (2000), S. 5.

²³ Vgl. stellvertretend Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 122, 164; Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001), S. 27, 29.

²⁴ McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1997), S. 19.

²⁵ McNeil, Alexander (1997b), S. 5.

²⁶ Vgl. Balkema, A./ Haan, L. de (1974), S. 792 f.; Pickands, James (1975), S. 119 f.; Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 158 f.; McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1997), S. 4; Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001), S. 51 f.; Severin, Martin (2002), S. 4.

²⁷ Die GPD kann in ihrer Grundform ohne Lageparameter und Skalenparameter geschrieben werden. In der obigen Schreibweise ist der Lageparameter Null. Die obige Schreibweise der GPD folgt Embrechts, Paul/

Für den Gestaltparameter $\xi = 0$ liegt eine Exponentialverteilung vor, für $\xi < 0$ der zweite Typ der reparametrisierten Paretoverteilung.²⁸ Die GPD ist bei positivem Gestaltparameter ξ eine reparametrisierte Form der Paretoverteilung, die sich zur Modellierung von Verteilungen mit fat tails bzw. heavy tails besonders eignet.²⁹ Für das Risikomanagement ist die Bewältigung großer Risikowerte und somit die Modellierung von Verteilungen mit fat tails bedeutend.

Das Quantil der GPD schätzt den erwarteten Risikowert für eine Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$. Der expected shortfall schätzt den erwarteten Risikowert in dem Teil der GPD, der vom Quantil der GPD für eine Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ nicht erfasst wird. Je dicker das Verteilungsende ist, umso mehr weichen Quantil und expected shortfall der GPD voneinander ab. Für eine Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ lässt sich der Quantilschätzer für das p-Quantil der GPD schreiben als

$$\hat{x}_p = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} (1-p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

wobei N_u die Anzahl der Werte über der Schwelle u und n den Stichprobenumfang, $\hat{\xi}$ den Schätzer für den unbekanntem Gestaltparameter und $\hat{\beta}$ den Schätzer für den unbekanntem Skalenparameter der GPD bezeichnen.³⁰

Der expected shortfall lässt sich für eine verallgemeinerte Paretoverteilung mit $\xi < 1$ für eine Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ schätzen durch

$$\hat{S}_p = \hat{x}_p \left(\frac{1}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi} \cdot u}{(1-\hat{\xi}) \cdot \hat{x}_p} \right),$$

wobei der Schätzer \hat{S}_p nach Umformungen auch in der Form

$$\hat{S}_p = \frac{\hat{x}_p}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi} \cdot u}{1-\hat{\xi}}$$

angegeben werden kann.³¹ Strebt der Exzessmittelwert mit fortschreitender Schwelle u

Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 162 sowie Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001), S. 45.

²⁸ Vgl. Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001), S. 45.

²⁹ Vgl. Këllezi, Evis/ Gilli, Manfred (2000), S. 10.

³⁰ Vgl. Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 354; McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1997), S. 10; Emmer, Susanne/ Klüppelberg, Claudia/ Trüstedt, Matthias (1998), S. 6; Borkovec, Milan/ Klüppelberg, Claudia (2000), S. 9; Këllezi, Evis/ Gilli, Manfred (2000), S. 10; Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001), S. 53.

gegen unendlich, so ist aus dieser Formel allgemein ersichtlich, dass das Verhältnis von expected shortfall S_p zu theoretischem Quantil x_p vorwiegend durch den Faktor $1/(1-\xi)$ bestimmt wird. Dies bedeutet, je dicker das Verteilungsende der GPD ist, umso mehr weichen S_p und x_p voneinander ab.

Die Anwendung von Quantilschätzer und expected shortfall der GPD steht in der Praxis vor dem Problem, einen geeigneten Schwellenwert u festzulegen. Wird u zu groß gewählt, stehen zu wenige Exzedenten zur Verfügung, um $\hat{\xi}$ als Schätzer für den unbekanntem GPD-Gestaltparameter und $\hat{\beta}$ als Schätzer für den unbekanntem GPD-Skalenparameter zu ermitteln. Wird u zu klein gewählt, weist die GPD-Approximation einen systematischen Fehler auf.³²

In Anlehnung an Borkovec, Beirlant, Embrechts, Emmer, Gilli, Hogg, Küllezi, Klugman, Klüppelberg, McNeil, Saladin, Teugels, Trüstedt, Vynkier werden daher Exzessmittelwertfunktion und sample mean excess plot als Hilfsmittel zur Wahl von u verwendet.³³

Die Exzessmittelwertfunktion (mean excess function, MEF)

$$e(u) = E(X - u | X > u), \quad u \geq 0,$$

ordnet jeder Schwelle $u \geq 0$ den entsprechenden Exzessmittelwert $e(u)$ zu; sie wird geschätzt durch die empirische Funktion

$$e_n(u) = \frac{1}{\#\{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n (X_i - u)^+, \quad u \geq 0,$$

die bei den ansteigend sortierten, nichtnegativen Daten jeden Wert als Schwelle u betrachtet und für jede Schwelle u den Exzessmittelwert ermittelt, d. h., es wird für jede Schwelle die Summe der Exzesse gebildet und durch die Anzahl der Exzedenten dividiert,

³¹ Vgl. McNeil, Alexander (1999), S. 8; Küllezi, Evis/ Gilli, Manfred (2000), S. 11; Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001), S. 62.

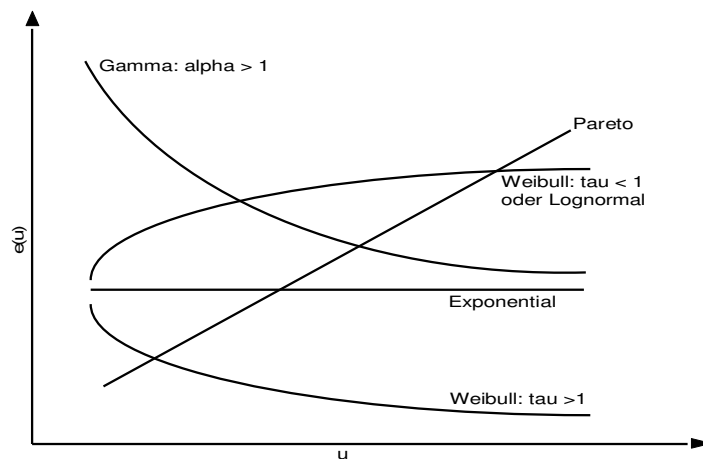
³² Vgl. Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 355.

³³ Vgl. Hogg, Robert V./ Klugman, Stuart A. (1984), S. 17; Beirlant, Jan/ Teugels, Jozef L./ Vynckier, Petra (1996), S. 37 f.; Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 355 f.; McNeil, Alexander (1997a), S. 127 f.; McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1997), S. 5; Emmer, Susanne/ Klüppelberg, Claudia/ Trüstedt, Matthias (1998), S. 3; Borkovec, Milan/ Klüppelberg, Claudia (2000), S. 9 f.; Küllezi, Evis/ Gilli, Manfred (2000), S. 13 f.

die größer als die jeweils betrachtete Schwelle sind.³⁴ Das Grenzverhalten ausgewählter Standardfunktionen im Mean Excess Plot lässt sich in idealisierter Form wie folgt darstellen:³⁵

Abbildung 1:

Grenzverhalten ausgewählter Standardfunktionen im Mean Excess Plot



Mit fortschreitender Schwelle u fällt der Exzessmittelwert $e(u)$ von Verteilungen mit short tails gegen Null. Der Exzessmittelwert $e(u)$ der Exponentialverteilung strebt mit fortschreitender Schwelle u im mean excess plot gegen eine Konstante bzw. eine horizontale Linie. Verteilungen mit fat tails weisen einen Exzessmittelwert auf, der mit fortschreitender Schwelle u im mean excess plot über alle Grenzen steigt.

Ausgehend vom Theorem von Pickands, Balkema, de Haan kann eine theoretisch vernünftige Schwelle u für die Konvergenz gegen die GPD heuristisch im sample mean excess plot gefunden werden, indem u so gewählt wird, dass die empirische Exzessmittelwertfunktion $e_n(u)$ in größtmöglicher rechtsseitiger Umgebung von u linear wächst.³⁶ In der Praxis führt die Wahl von u nach dieser Regel nicht immer eindeutig zu einer einzigen Schwelle mit der Folge, dass mehrere Schwellen für die Approximation ausgewählt werden. Eine weiterführende Überlegung wird in Abschnitt 4 angesprochen.

³⁴ Vgl. Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 160 f., S. 294 ; Emmer, Susanne/ Klüppelberg, Claudia/ Trüstedt, Matthias (1998), S. 3; McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1998), S. 8; Borkovec, Milan/ Klüppelberg, Claudia (2000), S. 9; Küllezi, Evis/ Gilli, Manfred (2000), S. 14; Severin, Martin (2002), S. 6.

³⁵ In Anlehnung an Beirlant, Jan/ Teugels, Jozef L./ Vynckier, Petra (1996), S. 39 Abbildung I.15; Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 295.

³⁶ Vgl. Borkovec, Milan/ Klüppelberg, Claudia (2000), S. 9; Severin, Martin (2002), S. 6.

Neben der Auswahl eines Schwellenwertes für die Konvergenz der Exzessverteilung gegen die GPD beeinflussen die Methoden zur Schätzung der unbekanntenen Werte für ξ sowie β der GPD die Güte der Approximation der betrachteten Stichprobenwerte durch die GPD. Als Methoden zur Schätzung der GPD-Parameter sind die Maximum Likelihood-Methode (ML-Methode), die Probability Weighted Moments-Methode (PWM-Methode) und die Methode der kleinsten Quadrate (OLS-Methode) anwendbar. Die vorgenannten Methoden sind im Schrifttum ausführlich erläutert und werden daher hier nur kurz angesprochen:

Die ML-Methode ist zur Ermittlung von Schätzwerten für die GPD am weitesten verbreitet.³⁷ Hosking, Wallis, Wood sehen bei $\xi \geq 0$ in der PWM-Methode eine Alternative zur ML-Methode.³⁸ Hosking und Wallis fanden heraus, dass die PWM-Schätzwerte für eine GPD mit $0 \leq \xi \leq 0,4$ geringer um die empirischen Werte streuen als bei der ML-Methode.³⁹ Im Weiteren ermittelten Rootzén und Tajvidi, dass die PWM-Methode bei einer GPD mit $\xi \geq 0,5$ einen im Vergleich zur ML-Methode höheren systematischen Fehler (Bias) der Schätzwerte aufweist. Die OLS-Methode kann nach Castillo, Gumbel, Jun, Oh, Shim, Tsay ebenso zur Konstruktion von Schätzungen für die Parameter einer Extremwertverteilung herangezogen werden.⁴⁰ Embrechts, Emmer, Gumbel, Klüppelberg, Mikosch, Trüstedt führen aus, dass sich die unbekanntenen Parameter einer Extremwertverteilung ad hoc durch den Ordinatenabschnitt und die Steigung der Trendgeraden im QQ-Plot mittels linearer Regression schätzen lassen, was hier nicht weiter vertieft wird.⁴¹

³⁷ Vgl. Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 358. Zur Anwendung der ML-Methode im Rahmen der POT-Methode z. B. Smith, Richard L. (1989), S. 371 f.; Kremer, Erhard (1997), S. 5; McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1997), S. 8; Borkovec, Milan/ Klüppelberg, Claudia (2000), S. 17; Kellezi, Evis/ Gilli, Manfred (2000), S. 15; Patie, Pierre (2000), S. 16; Severin, Martin (2002), S. 10. Zur Ermittlung von Schätzwerten für die GPD Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R. (1987), S. 340 f.; Coles, Stuart G./ Powell, Elwyn A. (1996), S. 121 f.; Lo, Brian (2001), S. 42; Reiss, Rolf-Dieter/ Thomas, Michael (2001), S. 92 f.

³⁸ Zur Erläuterung der PWM-Methode vgl. Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R./ Wood, E. F. (1985), S. 251 f.; Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R. (1987), S. 339 f.; Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R. (1997), S. 3 f. Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R. (1987), S. 340 f.; Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 358; McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1998), S. 8.

³⁹ Untersucht wurden von Hosking, Wallis Stichproben mit 15, 25, 50, 100, 200, 500 Werten. Als Maßstab für die Streuung der GPD-Schätzwerte um die empirischen Werte wurde der Root Mean Squared Error (RMSE) herangezogen. Vgl. Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R. (1987), S. 342 f.

⁴⁰ Vgl. Gumbel, Emil Julius (1958), S. 34 f.; Castillo, Enrique (1988), S. 127 f., 319 f.; Shim, J. S./ Oh, B. C./ Jun, K. C. (1994), S. 188; Tsay, Ruey S. (2000), S. 13 f.

⁴¹ Vgl. Gumbel, Emil Julius (1958), S. 34 f.; Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997), S. 293; Emmer, Susanne/ Klüppelberg, Claudia/ Trüstedt, Matthias (1998), S. 3. Zur Anwendung des Regressionsansatzes für die Schätzung der unbekanntenen GPD-Parameter im sog. Mean Excess-Plot-Regression-Ansatz vgl. Zeranski, Stefan (2005), S. 157-161.

Vor der Verwendung einer theoretischen Verteilung zur Risikoschätzung ist diese auf ihre Approximationsgüte zu untersuchen. Das Ziel der statistischen Überprüfung einer Verteilungsannahme besteht darin, herauszufinden, ob die empirische Verteilung hinreichend gut durch die jeweilige Extremwertverteilung approximiert wird, um anschließend anstelle der empirischen die theoretische Verteilung für die Risikoschätzung verwenden zu können.⁴² Longin schlägt vor, Extremwertverteilungsannahmen vor deren Anwendung für die Risikoschätzung in einem Anpassungstest zu überprüfen. Die Überprüfung der vollspezifizierten GPD-Annahmen erfolgt in diesem Papier mit dem Kolmogorov-Smirnov (KS)-Anpassungstest in Anlehnung an Hogg, Klugman.⁴³ Dabei ist vor allem interessant, mit welcher Abweichung die ansteigend geordneten Realisationen der Risikogröße über einer Schwelle und insbesondere die Stichprobenwerte im Verteilungsrand geschätzt werden. Das Ziel dieser Untersuchung besteht darin, statistisch validierte Verteilungen in ihrer Güte bei der Risikoschätzung in der Stichprobe weiter zu differenzieren, um die Approximationsgüte einer Verteilung besser beurteilen und die Auswahl einer Verteilung zur Risikoschätzung weiter objektivieren zu können. Andere Vertreter im Schrifttum, z. B. Bensalah, Bradley, Coles, Emmer, Gençay, Gilli, Küllezi, Klüppelberg, Kremer, McNeil, Saladin, Selçuk, Taquu, Trüstedt, verwenden einen Sichttest zur Beurteilung der Approximationsgüte einer theoretischen Verteilungsannahme für die Risikoschätzung.⁴⁴ Der Abschnitt 4 enthält die QQ-Plots zu den GPD-Approximationen, die mit oben genannten Parameterschätzmethoden ermittelt wurden.

Die Beurteilung der GPD-Approximationsgüte erfolgt im Schrifttum wie bereits angesprochen anhand des RMSE, der sich auf die gesamte betrachtete Verteilung über einer Schwelle bezieht. Da bei der Risikoschätzung mit der POT-Methode die Approximation des Verteilungsrandes im Vordergrund steht, kann der RMSE beispielsweise für den Q90-tail, Q95-tail sowie den Q99-tail ermittelt werden, um den RMSE als absolutes Maß für die Approximationsgüte aller Stichprobenwerte um Informationen über die Approximationsgüte im Verteilungsrand zu ergänzen. Für die

⁴² Vgl. Longin, François (2000), S. 1106; Reiss, Rolf-Dieter/ Thomas, Michael (2001), S. 128; Berkowitz, Jeremy (2002), S. 77.

⁴³ Zur Anwendung des KS-Anpassungstests bei der statistischen Überprüfung der Annahme einer vollspezifizierten Paretoverteilung vgl. Hogg, Robert V./ Klugman, Stuart A. (1984), S. 105 f.

⁴⁴ Vgl. Kremer, Erhard (1997), S. 1 f.; McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1997), S. 9; Emmer, Susanne/ Klüppelberg, Claudia/ Trüstedt, Matthias (1998), S. 8; Bensalah, Younes (2000), S. 17 f.; Küllezi, Evis/ Gilli, Manfred (2000), S. 13 f.; Bradley, Brendan O./ Taquu, Murad S. (2001), S. 50; Coles, Stuart (2001), S. 89; Gençay, Ramazan/ Selçuk, Faruk (2001), S. 21 f.

praktische Risikoanalyse im Konzept des Liquidity at Risk (LaR) und Value at Risk (VaR) liegt es nahe, die Ermittlung des RMSE im Verteilungsrand an die bankspezifische Systematisierung des LaR- und VaR-Risikoniveaus anzupassen.

Als weiteres deskriptives Maß zur Beurteilung der Approximationsgüte einer theoretischen Verteilung eignet sich $R^2(45^\circ)$. $R^2(45^\circ)$ ist ein relatives Abweichungsmaß und beruht auf der Überlegung, dass die Punktwolke vollständig auf der 45° -Ursprungsgeraden im QQ-Plot liegt, wenn jede Beobachtung exakt durch eine bestimmte theoretische Verteilung geschätzt wird. Im Idealfall schätzt die GPD somit exakt alle betrachteten Risikowerte in der Stichprobe und alle Punkte liegen im QQ-Plot auf der Regressionsgeraden ($R^2 = 1$ oder 100 %), die mit Steigung 1 durch den Koordinatenursprung verläuft, d. h., die Punktwolke im QQ-Plot wird vollständig durch die 45° -Ursprungsgerade erklärt ($R^2(45^\circ) = 1$ oder 100 %) und $RMSE = 0$. Kennzeichnet man für die nachfolgende Überlegung die empirischen Quantile mit y_i , den Mittelwert der empirischen Quantile mit \bar{y} , die theoretischen Quantile mit x_i , die Schätzwerte auf der Regressionsgeraden im QQ-Plot mit \hat{y}_i , lassen sich R^2 und $R^2(45^\circ)$ allgemein angeben durch:⁴⁵

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad \text{mit} \quad \hat{y}_i = m \cdot x_i + b,$$

$$R^2(45^\circ) = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad \text{mit} \quad \hat{y}_i = x_i;$$

d. h., R^2 und $R^2(45^\circ)$ sind gleich, wenn die Regressionsgerade, die die Punktwolke im QQ-Plot am besten erklärt, Steigung $m = 1$ und Ordinatenabschnitt $b = 0$ aufweist.

⁴⁵ Zur Varianzzerlegung des Bestimmtheitsmaßes bei der linearen Einfachregression vgl. z. B. Bosch, Karl (1998), S. 75; Schlittgen, Rainer (1998), S. 421 f.

3 Daten

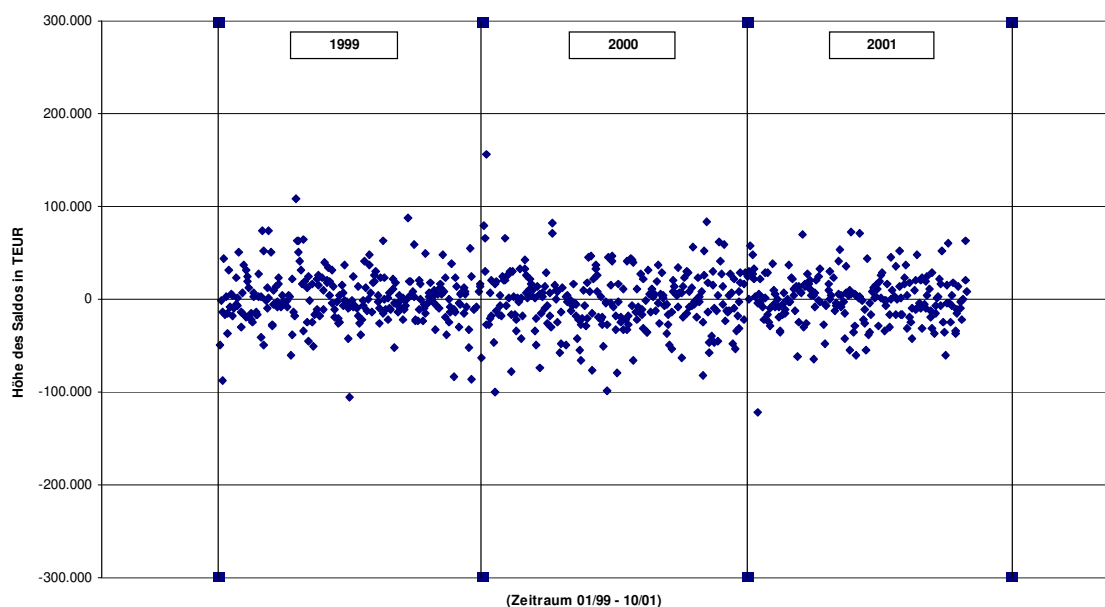
Die empirische Untersuchung der Liquiditätsrisiken verwendet bei der Erforschung des Liquidity at Risk-Konzepts die in einer Regionalbank beobachteten Zahlungsstromrisiken und leitet die Risikogröße aus dem geschäftstäglichen Saldo der autonomen Zahlungen der Bank ab. Autonome Zahlungen umfassen alle Zahlungen einer Bank, deren Höhe und Zeitpunkt im normalen Geschäftsbetrieb nicht von der Gelddisposition beeinflussbar sind. Der Saldo der autonomen Zahlungen ist von der Gelddisposition zur Herstellung der Zahlungsbereitschaft geschäftstäglich im Spitzenausgleich zu disponieren.

Auf dieser Grundlage beschreibt dieses Papier den Liquidity at Risk als den erwarteten Nettofinanzierungsbedarf bzw. Auszahlungsüberschuss aus allen autonomen Zahlungen einer Bank während eines Geschäftstages, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird.

Die verwendeten Liquiditätsdaten wurden von Zeranski (2005) in der SchmidtBank, einer Regionalbank mit Firmensitz in Hof/ Bayern, erhoben. Sie umfassen die geschäftstäglichen autonomen Ein- und Auszahlungsüberschüsse im Zeitraum vom 04.01.1999 bis einschließlich 31.10.2001 bzw. (01/99 – 10/01).

Abbildung 2:

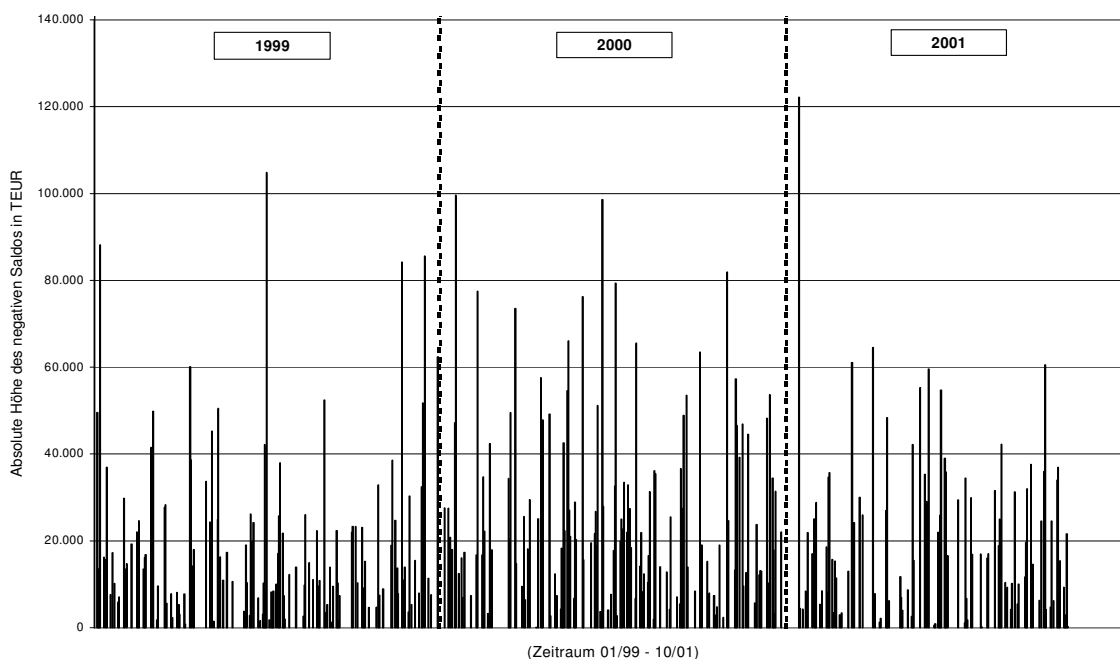
Streudiagramm des Saldos der autonomen Zahlungen (01/99 – 10/01)



Bei den Zahlungsstromrisiken in der untersuchten Regionalbank sieht der Verlauf der des geschäftstäglich aufgetretenen Nettofinanzierungsbedarfs der Bank wie folgt aus, wobei der größte autonome Auszahlungsüberschuss (MAX_{emp}) bei 122.146 TEUR lag:

Abbildung 3:

Verlauf Auszahlungsüberschüsse beim Saldo der autonomen Zahlungen (01/99 – 10/01)



Die empirische Untersuchung der Erfolgsrisiken verwendet bei der Erforschung des Value at Risk-Konzepts den Euro Stoxx 50 und leitet die Risikogröße aus den geschäftstäglichen Schlusskursen ab. Auf dieser Grundlage beschreibt dieses Papier den Value at Risk als den erwarteten geschäftstäglichen Tagesschlusskursrückgang des Euro Stoxx 50, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird.

Im Zeitraum vom 04.01.1999 bis einschließlich 01.08.2006 bzw. (01/99 – 08/06) stellten sich Kursverlauf und geschäftstägliche Tagesschlusskursverluste wie folgt dar, wobei der größte Tageskursschlusskursverlust (MAX_{emp}) bei 220,38 lag:

Abbildung 4:

Verlauf des Euro Stoxx 50 (01/99 – 08/06)

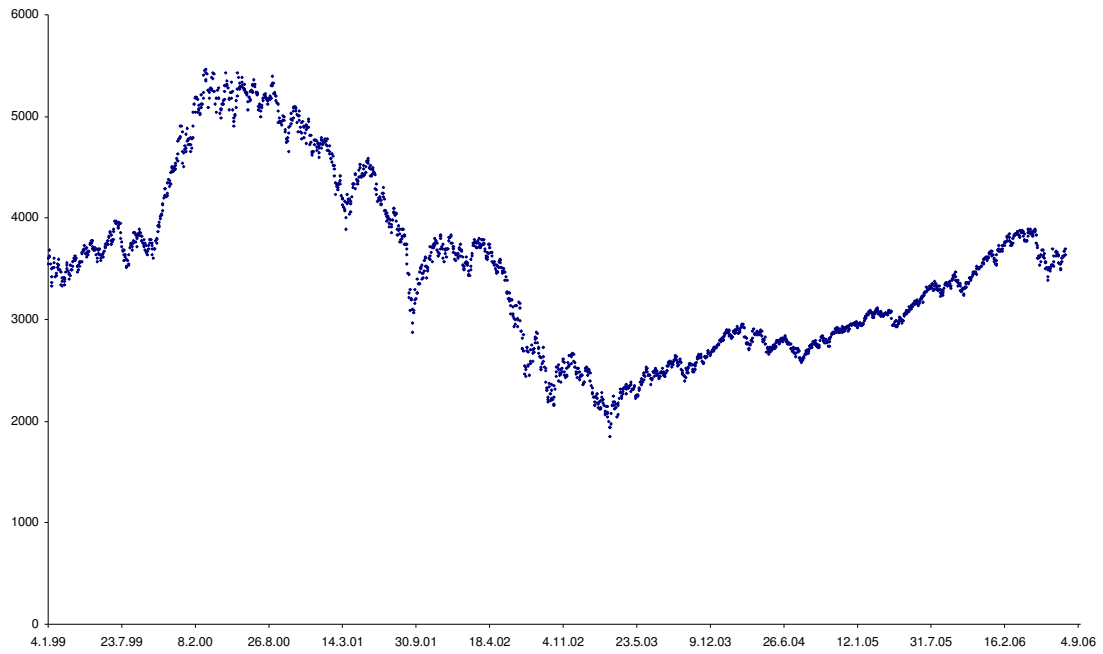
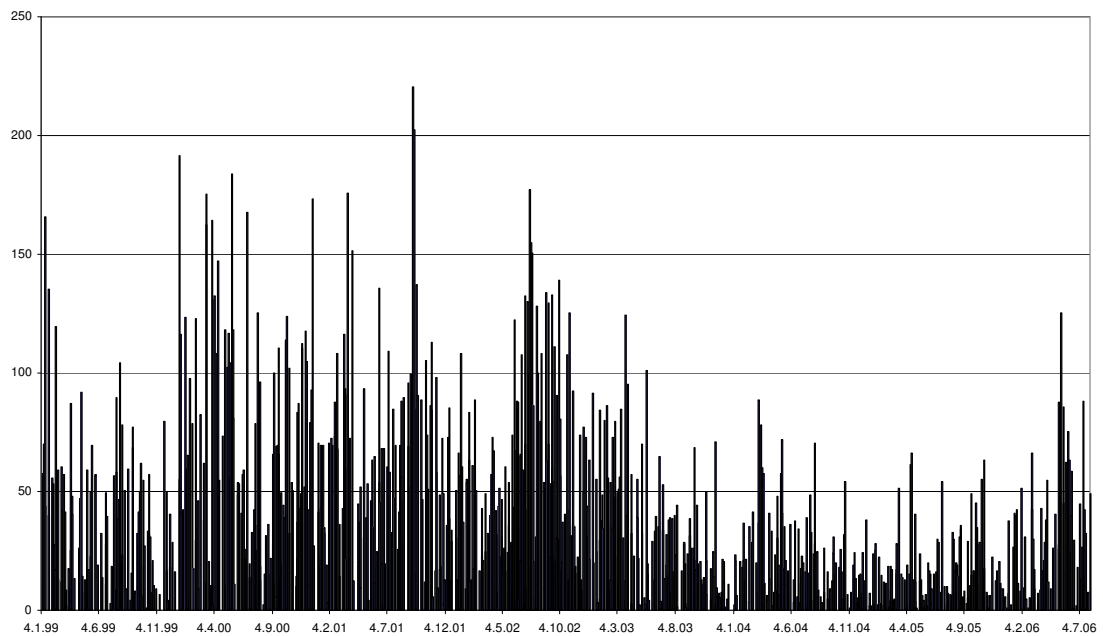


Abbildung 5:

Verlauf der Tagesschlusskursverluste beim Euro Stoxx 50 (01/99 – 08/06)



4 Empirische Untersuchung

In der empirischen Untersuchung werden Zahlungsstromrisiken (Absatz 4.1) und Aktienkursrisiken (Absatz 4.2) mit folgenden Fragestellungen untersucht:

- (1) Wie gut lassen sich die beobachteten Risikogrößen durch unterschiedliche Parameterschätzmethoden mit der GPD approximieren?
- (2) Welche Streuung weisen die Schätzungen bisher noch nicht beobachteter Risikowerte bei den verschiedenen GPD-Approximationen auf?

Die Berechnungen zur Extremwertstatistik wurden vor allem mit den EVIS-Prozeduren von McNeil, der S-Plus Software FinMetrics, Mathematica und Excel durchgeführt.⁴⁶

Den Untersuchungen vorangestellt ist eine Analyse der Daten auf Zufälligkeit, die Frey, McNeil, Schmock bei der Analyse von Aktienkursrisiken folgt.⁴⁷ Im Weiteren werden wie bereits oben angesprochen die GPD-Approximationen im KS-Anpassungstest in Anlehnung an Hogg, Klugmann sowie anhand des QQ-Plots auf ihre Güte untersucht.

4.1 Analyse extremer Zahlungsstromrisiken

Der Test auf Autokorrelation mit $\alpha = 0,01$ führt zum Ergebnis, dass die Daten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % mit der Zufälligkeitsannahme verträglich sind. Abbildung 6 zeigt, dass die Konfidenzbänder von den Autokorrelationskoeffizienten nicht überschritten werden. Im KS-Anpassungstests auf GPD mit $\alpha = 0,01$ konnte keine der untersuchten GPD-Approximationen bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % verworfen werden. Abbildung 7 zeigt den Verlauf der Stichprobenexzessfunktion. Die Tabelle 1 gibt einen Überblick über die GPD-Approximationen und Risikoschätzungen.

⁴⁶ Vgl. McNeil, Alexander (2001), <http://www.math.ethz.ch/~mcneil/software.html>. Zu S+FinMetrics vgl. <http://www.insightful.com/products/product.asp?PID=31>.

⁴⁷ Beim zeitlichen Abstand erscheint es in der Analyse der vorliegenden Stichproben auf Autokorrelation ausreichend, für das Lag als größten Wert 30 Tage zu wählen, zumal damit die Zyklen der autonomen Zahlungen bis zu einem Monat voll erfasst werden. Unbenommen davon haben Frey, McNeil und Schmock bei der Untersuchung des Standard & Poors Index auf Autokorrelation in einem Erhebungszeitraum von 1000 Tagen einen zeitlichen Abstand (Lag) von 30 Tagen für die Autokorrelationsuntersuchung gewählt. Vgl. Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001), S. 144.

Abbildung 6:

Korrelogramm Saldo autonomer Zahlungen (01/99–10/01; $\alpha = 0,01$)

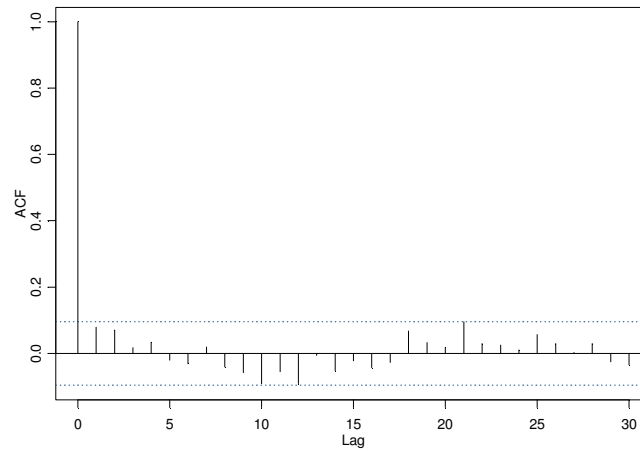


Abbildung 7:

Sample Mean Excess Plot der autonomen Auszahlungsüberschüsse (01/99–10/01)

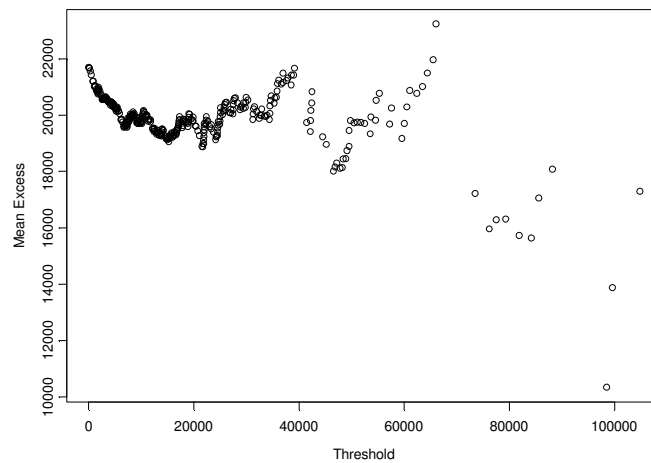


Abbildung 8:

Shape Plot der autonomen Auszahlungsüberschüsse (01/99–10/01)

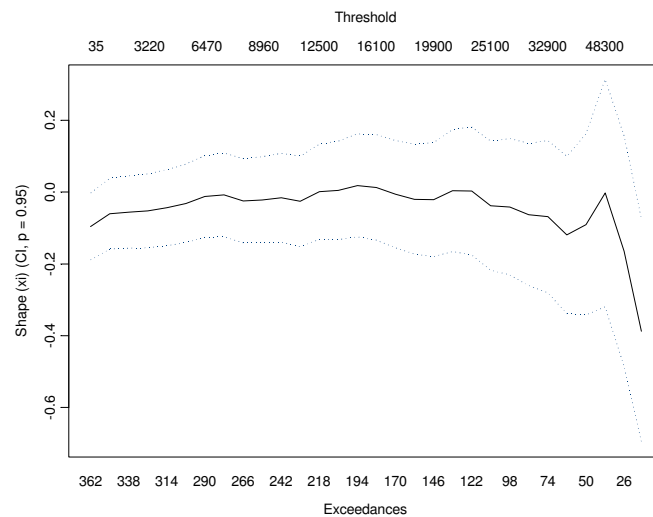


Tabelle 1:

Übersicht zu GPD-Approximationsgüte, Stressszenarien extremer Zahlungsstromrisiken

Schätzmethode	ML	PWM	OLS; GPD = MAXemp	OLS
Analyseobjekt	Geschäftstägliche Zahlungsstromrisiken einer Regionalbank			
u_T	6.192			
n	362			
N_u	293			
Schätzwert für β	20.112,55	19.880,82	19.636,94	19.636,94
Schätzwert für ξ	-0,01617525	-0,00291572	0,01339876	0,01763425
KS-Test: $K_{N_u;1-0,01}$	0,0951			
KS-Test: d_{N_u}	0,0858	0,0881	0,0904	0,0902
QQ-Plot: m	1,0353	1,0229	1,0053	0,9975
QQ-Plot: b	-691,1	-393,5	-8,3	112,7
QQ-Plot: R^2	99,7476%	99,7963%	99,8280%	99,8309%
QQ-Plot: $R^2(45^\circ)$	99,6193%	99,7361%	99,8208%	99,8297%
Bias	-218,8	-197,6	-129,7	-48,1
RMSE	1.204	1.002	826	805
Q90tail_RMSE	3.085	2.449	1.850	1.772
Q95tail_RMSE	4.289	3.401	2.563	2.445
Q99tail_RMSE	4.881	2.809	1.580	2.331
Stichprobenmaximum	122.146			
0,999 Quantil	133.834	138.028	143.766	145.765
0,999 Shortfall	151.594	157.468	165.538	168.260
0,9999 Quantil	174.626	182.770	193.997	197.695
0,9999 Shortfall	191.738	202.080	216.451	221.122
0,99999 Quantil	213.927	227.213	245.802	251.777
0,99999 Shortfall	230.413	246.393	268.960	276.175
0,999999 Quantil	251.792	271.358	299.230	308.101
0,999999 Shortfall	267.675	290.410	323.113	333.510

McNeil, Saladin ordnen shape plots wie folgt ein: *“From the statistical point of view, ..., if the model is a good description of the data, parameter estimates are not dependent on the threshold and should be fairly constant over a range of high thresholds.”*⁴⁸

⁴⁸ McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1998), S. 7.

Die gestrichelten Linien in Abbildung 8 beschreiben das asymptotische 95 %-Konfidenzintervall (CI, $p = 0.95$) zur Punktschätzung für den Gestaltparameter (Shape (ξ)). Abbildung 8 zeigt, dass erst ein Schwellenwert größer ca. 25.000 TEUR bzw. eine Exzedentenanzahl kleiner ca. 100 die Gestalt der GPD-Approximation bemerkenswert beeinflusst.⁴⁹ So besehen erscheint der vorliegende Stichprobenumfang und die Auswahl der Schwelle u_T in Tabelle 1 vertretbar, zumal die Gestalt der GPD-Approximationen relativ robust bei Veränderungen der Schwellen u ist.

Tabelle 1 zeigt auf, dass die im Schrifttum weit verbreitete ML-Methode schlechtere Approximationen der empirischen Randverteilung bei den betrachteten Zahlungsstromrisiken lieferte. Im KS-Anpassungstest konnte keine GPD-Approximation bei $\alpha = 0,01$ verworfen werden, weil die Werte für die Prüfgröße d_{Nu} stets kleiner als der kritische Wert $K_{Nu;1-0,01}$ waren. Mit zunehmender Modellgüte nähern sich für die Regressionsgerade der Punktwolke im QQ-Plot die Steigung $m = 1$ und der Achsenabschnitt $b = 0$, der RMSE geht zurück und $R^2(45^\circ)$ steigt an.

Der RMSE bei der GPD-Approximation anhand der ML-Methode ist mit 1.204 TEUR bei $R^2(45^\circ) = 99,62 \%$ am größten. Die PWM-Methode weist einen geringeren RMSE mit 1.002 TEUR bei $R^2(45^\circ) = 99,74 \%$ auf, der sich bei der OLS-NB-Methode auf 826 TEUR bei $R^2(45^\circ) = 99,82 \%$ verringert, wobei die OLS-Methode den geringsten RMSE mit 805 TEUR, genauer 804,95 TEUR, bei $R^2(45^\circ) = 99,83 \%$ aufweist.

Alle Verteilungen haben gemeinsam, dass der RMSE im Verteilungsrand 90 %-Quantil Tail deutlich ansteigt. Die ML-Methode weist im Q90-Tail mit 4.881 TEUR den größten Q90-Tail-RMSE auf, die OLS-Methode mit 1.772 TEUR den kleinsten Wert. Empirisch bemerkenswert ist, dass die GPD-Approximationen mit der etwas geringeren Approximationsgüte tendenziell bisher noch nicht beobachtete Risikowerte niedriger schätzen. Am deutlichsten wird dieser Unterschied beim 0,999999 Shortfall, wo die Risikoschätzungen um knapp 60 Mio. EUR voneinander abweichen.

Tabelle 2 ergänzt die oben genannten Untersuchungsergebnisse um eine Volliteration aller Schwellenwerte mit der OLS-Methode. Aus Tabelle 2 ist ersichtlich, dass sich nochmals

⁴⁹ Zur Interpretation des GPD-Shape Plot vgl. McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1998), S. 13; Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001), S. 59 f.

bessere Approximationsergebnisse erzielen lassen, wenn die Auswahl einer geeigneten Schwelle anstelle des Sample Mean Excess Plots (SME-Schwellenauswahl) in einer Volliteration für alle möglichen Schwellenwerte erfolgt. Die Ergebnisse in Tabelle 2 wurden ermittelt, indem für jede mögliche Schwelle in der Stichprobe die unbekannt Parameter der GPD mit Hilfe der OLS-Methode geschätzt wurden. Im Anschluss wurden die Ergebnisse nach dem RMSE aufsteigend sortiert. Tabelle 2 zeigt die besten 10 GPD-Approximationen mit der OLS-Methode aus der Volliteration.

Tabelle 2:

GPD-Güte bei SME-Schwellenauswahl und Volliteration aller Schwellenwerte

OLS-Modelle Lfd. Nr., sortiert nach RMSE	RMSE	Schwellenwert u_T	Schätzwert für β	Schätzwert für ξ
Volliteration-Lösungsansatz: Prüfung aller Schwellenwerte				
1	804,95	6.192	19.637,17	0,01762431
2	805,48	6.473	19.548,97	0,01948251
3	807,52	6.721	19.350,80	0,02346956
4	807,66	6.743	19.419,21	0,02185176
5	807,74	6.326	19.643,66	0,01752086
6	808,09	6.232	19.666,60	0,01708747
7	809,36	6.826	19.388,05	0,02276473
8	810,76	6.893	19.388,05	0,02281781
9	811,24	6.906	19.452,28	0,02156992
10	812,63	6.968	19.461,47	0,02139677
Sample Mean Excess-Plot-Lösungsansatz: Prüfung grafisch ausgewählter Schwellen				
Zeranski (2005)	820,79	7.345	19.355,61	0,02363105

Die Abbildungen 9, 10, 11, 12 zeigen für die Schwelle 6.192 TEUR QQ-Plots zur ML-, PWM-, OLS-NB-, OLS-Methode und veranschaulichen mit der geringen Streuung der Punktwolke die Ergebnisse aus dem KS-Anpassungstest, wonach alle untersuchten GPD-Approximationen eine hohe Modellgüte aufweisen. Die QQ-Plots beinhalten Informationen über Gleichung und Bestimmtheitsmaß der Regressionsgeraden sowie über RMSE und $R^2(45^\circ)$ als deskriptive Maße für die Approximationsgüte aus dem QQ-Plot.

Abbildung 9:

QQ-Plot zur GPD-Zahlungsstromrisiko-Approximation mit der ML-Methode

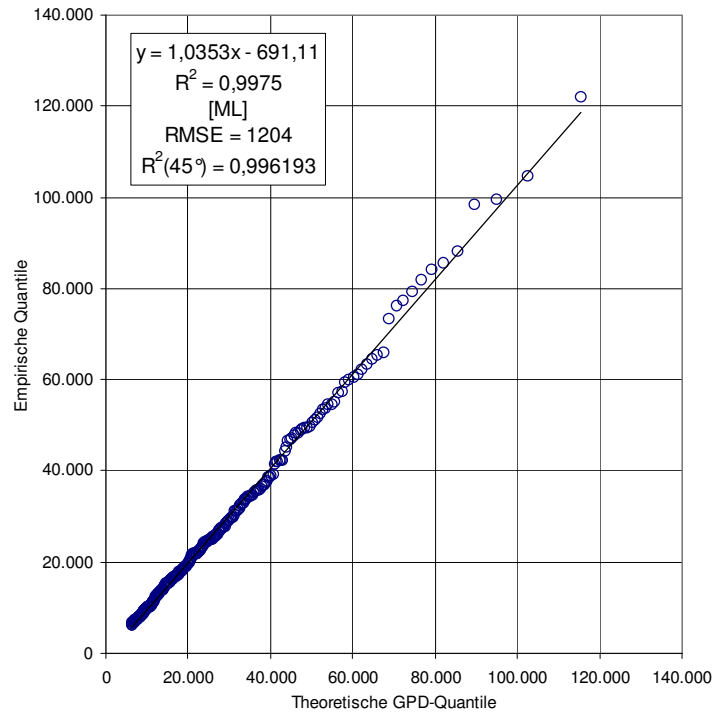


Abbildung 10:

QQ-Plot zur GPD-Zahlungsstromrisiko-Approximation mit der PWM-Methode

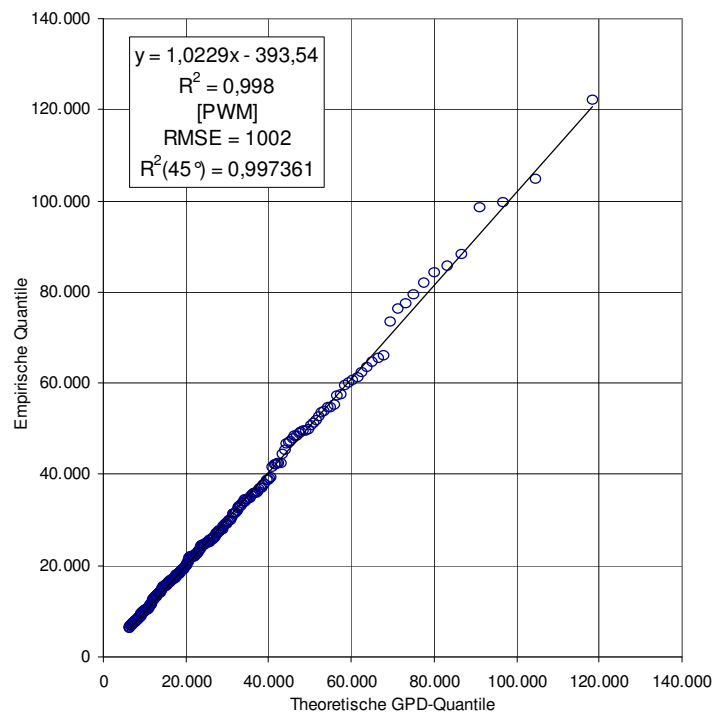


Abbildung 11:

QQ-Plot zur GPD-Zahlungsstromrisiko-Approximation mit der OLS-NB-Methode

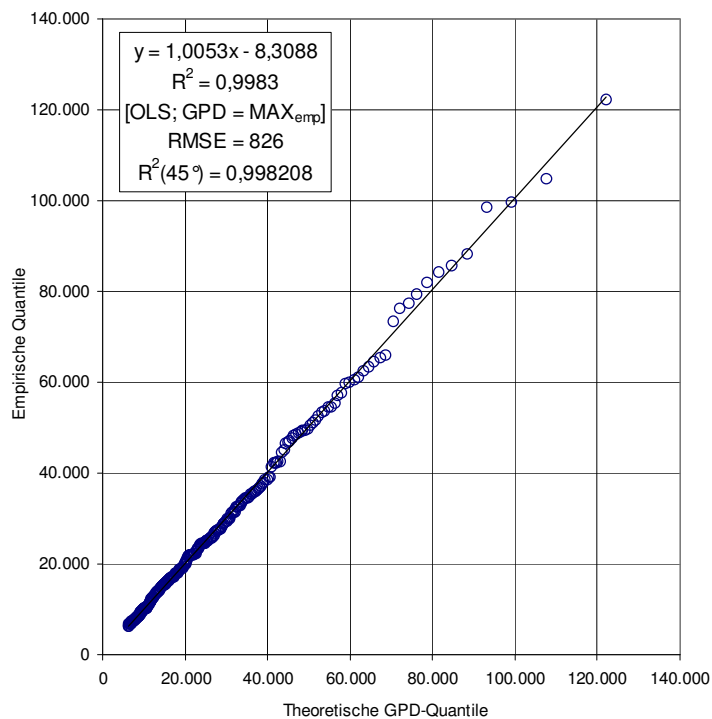
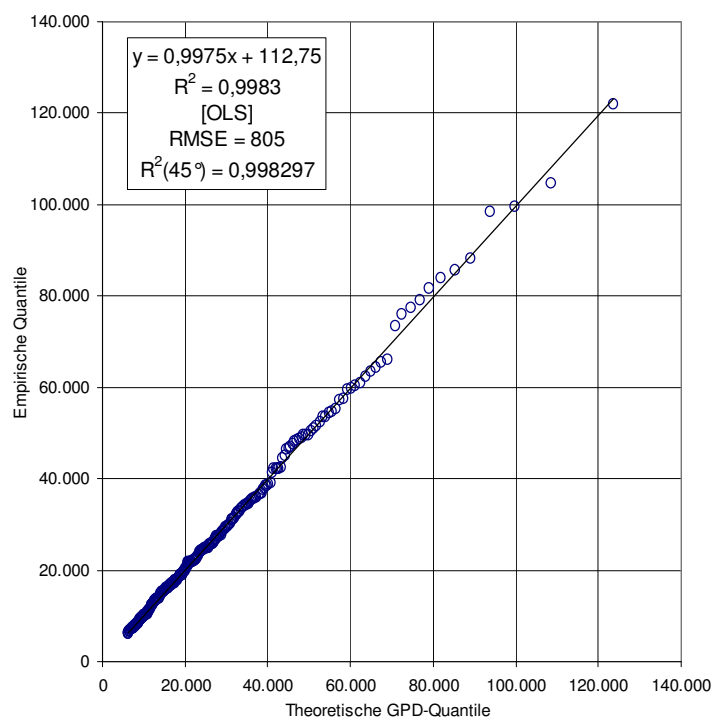


Abbildung 12:

QQ-Plot zur GPD-Zahlungsstromrisiko-Approximation mit der OLS- Methode



4.2 Analyse extremer Marktpreisrisiken

Der Test auf Autokorrelation mit $\alpha = 0,01$ führt zum Ergebnis, dass die Daten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % mit der Zufälligkeitsannahme verträglich sind. Abbildung 13 zeigt, dass die Konfidenzbänder von den Autokorrelationskoeffizienten nicht überschritten werden. Abbildung 14 zeigt den Verlauf der Stichprobenexzessfunktion.

Abbildung 13:

Korrelogramm Euro Stoxx 50 Tagesschlusskursschwankungen (01/99–08/06; $\alpha = 0,01$)

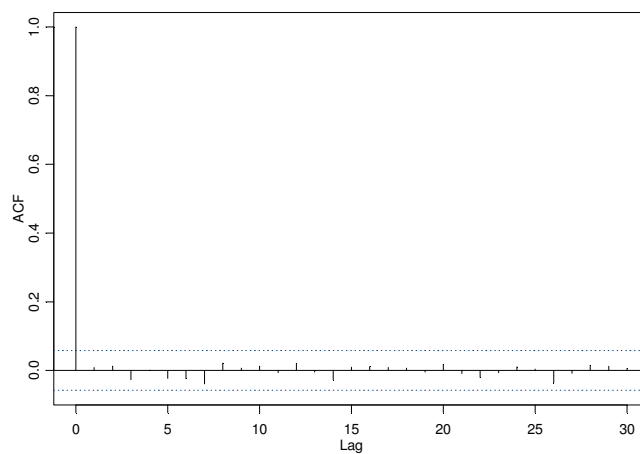


Abbildung 14:

Sample Mean Excess Plot Euro Stoxx 50 Tagesschlusskursschwankungen (01/99–08/06)

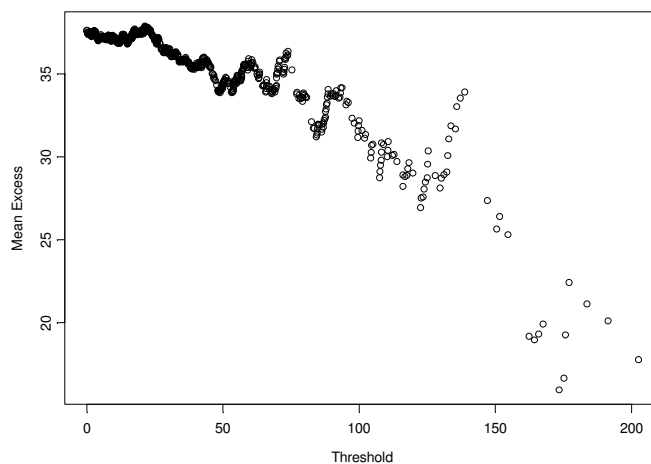


Tabelle 3 gibt einen Überblick über die GPD-Approximationen und Risikoschätzungen. Im KS-Anpassungstests auf GPD mit $\alpha = 0,01$ konnte keine der untersuchten GPD-Approximationen bei der Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % verworfen werden.

Tabelle 3:

Übersicht zu GPD-Approximationsgüte, Stressszenarien extremer Marktpreisrisiken

Schätzmethode	ML	PWM	OLS; GPD = MAXemp	OLS
Analyseobjekt	Geschäftstägliche EUROSTOXX 50-Schlusskursrisiken			
u_T	5,212			
n	935			
N_u	818			
Schätzwert für β	39,71635	38,80732	40,40237378	39,74580
Schätzwert für ξ	-0,06297907	-0,03886200	-0,07166778	-0,05606859
KS-Test: $K_{N_u;1-0,01}$	0,0569			
KS-Test: d_{N_u}	0,0195	0,0171	0,0243	0,0204
QQ-Plot: m	1,0178	0,9975	1,0159	1,0047
QQ-Plot: b	-0,64	0,24	-0,91	-0,36
QQ-Plot: R^2	99,9147%	99,8791%	99,9091%	99,9123%
QQ-Plot: $R^2(45^\circ)$	99,8830%	99,8771%	99,8805%	99,9082%
Bias	-0,11	-0,13	0,23	0,16
RMSE	1,21	1,24	1,22	1,07
Q90tail_RMSE	3,04	3,13	2,88	2,55
Q95tail_RMSE	3,91	4,25	3,81	3,39
Q99tail_RMSE	4,48	7,84	4,55	4,88
Stichprobenmaximum	220,38			
0,999 Quantil	224,22	236,34	222,03	229,22
0,999 Shortfall	248,61	265,05	245,23	254,97
0,9999 Quantil	279,79	302,03	274,80	287,95
0,9999 Shortfall	300,88	328,28	294,48	310,57
0,99999 Quantil	327,85	362,10	319,55	339,56
0,99999 Shortfall	346,10	386,11	336,23	359,45
0,999999 Quantil	369,43	417,03	357,49	384,92
0,999999 Shortfall	385,21	438,98	371,63	402,40

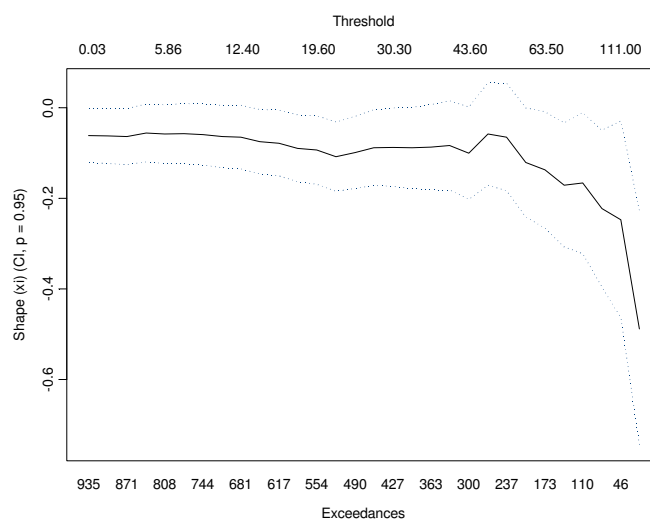
Im Unterschied zur Analyse extremer Zahlungsstromrisiken ist bei der Untersuchung extremer Aktienkursrisiken feststellbar, dass die ML-Methode besser als die PWM-Methode abschneidet. Daran wird deutlich, dass es sinnvoll ist, in der Praxis mehrere Methoden zur Ermittlung der GPD-Approximationen einzusetzen, insbesondere wenn der Entscheidungsträger besonders großen Wert auf eine gute Modellierung der hohen

Risikowerte im Verteilungsrand legt. Die OLS-Methode weist erneut den geringsten RMSE mit 1,07 bei $R^2(45^\circ) = 99,91\%$ auf.

Die Auswahl des Schwellenwertes erfolgte mit Hilfe des Sample Mean Excess Plots und trifft insgesamt auf ein stabiles Modell, was der nachfolgende Shape Plot zeigt. Wieder scheinen von der Auswahl des Schwellenwertes keine bedeutenden Auswirkungen auf die Modellgüte auszugehen, weil sich der Gestaltparameter mit fortschreitenden Schwellenwerten kaum verändert. Unbeschadet dessen lässt sich wie bei der Modellierung extremer Zahlungsstromrisiken angesprochen durch eine Volliteration aller Schwellenwerte die Auswahl einer optimalen Modellschwelle weiter objektivieren.

Abbildung 15:

Shape Plot der Euro Stoxx 50 Tagesschlusskursschwankungen (01/99–08/06)



Die Abbildungen 16, 17, 18, 19 zeigen für die Schwelle 5,212 Indexpunkte QQ-Plots zur ML-, PWM-, OLS-NB-, OLS-Methode und veranschaulichen mit der geringen Streuung der Punktwolke die Ergebnisse des KS-Anpassungstests, wonach alle untersuchten GPD-Approximationen eine hohe Modellgüte aufweisen. Die QQ-Plots beinhalten wieder die Informationen über Gleichung und Bestimmtheitsmaß der Regressionsgeraden sowie zu RMSE und $R^2(45^\circ)$ als weitere deskriptive Maße für die Approximationsgüte aus dem QQ-Plot.

Abbildung 16:

QQ-Plot zur GPD-Marktpreisrisiko-Approximation mit der ML-Methode

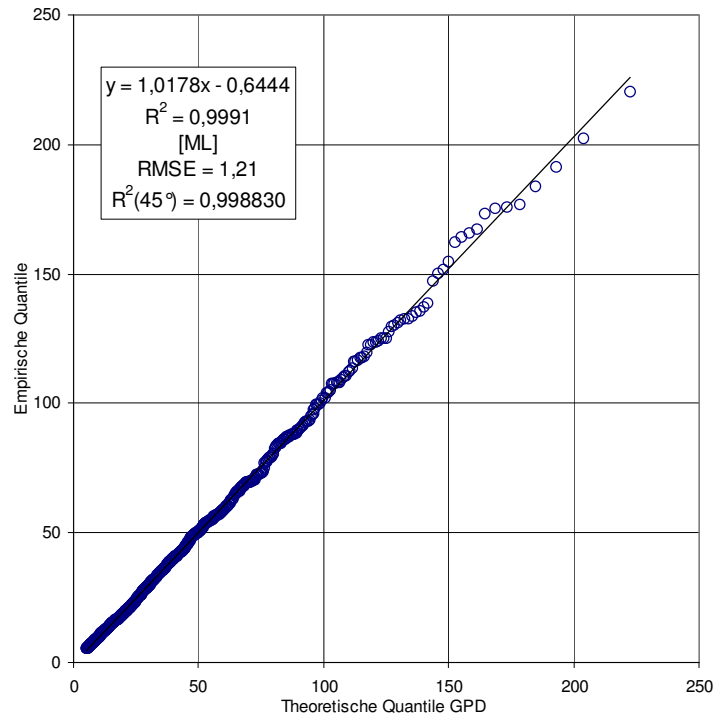


Abbildung 17:

QQ-Plot zur GPD-Marktpreisrisiko-Approximation mit der PWM-Methode

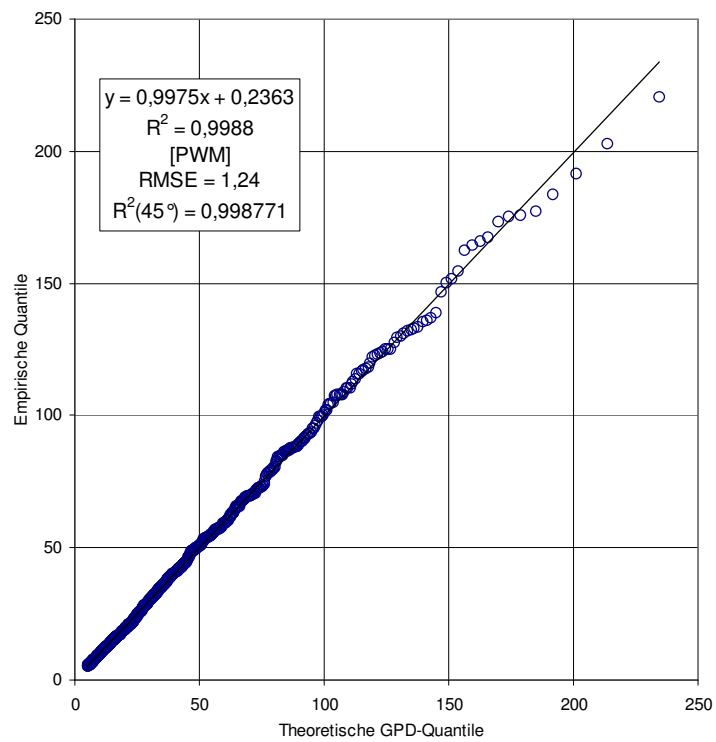


Abbildung 18:

QQ-Plot zur GPD-Marktpreisrisiko-Approximation mit der OLS-NB-Methode

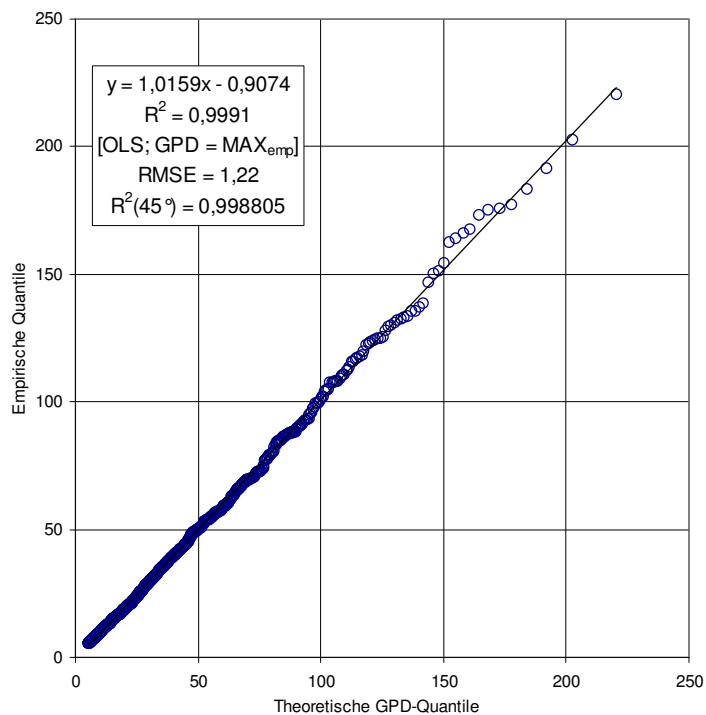
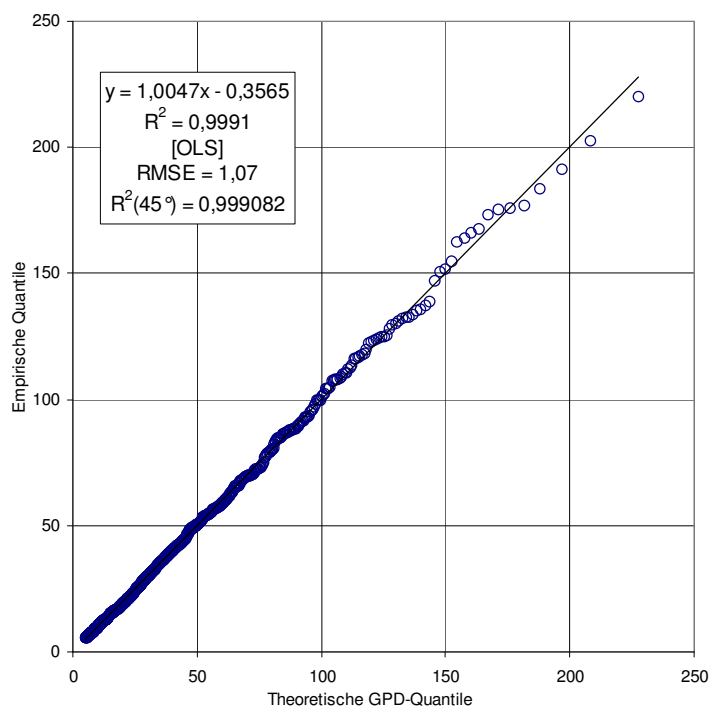


Abbildung 19:

QQ-Plot zur GPD-Marktpreisrisiko-Approximation mit der OLS-Methode



5 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hat ausgewählte extreme Liquiditäts- und Marktpreisrisiken im bankbetrieblichen Kontext der Konzepte von Liquidity at Risk und Value at Risk mit der POT-Methode empirisch untersucht, bei der im Unterschied zu Ereignisstresstests extremen Ereignissen eine statistische Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet wird.

Zunächst wurde kurz theoretisch in die POT-Methode mit ihren wichtigen Punkten für die praktische Modellierung eingeführt. Im empirischen Teil wurde aufgezeigt, dass eine systematische Schwellenauswahl (Volliteration aller Schwellen) dazu beitragen kann, die Auswahl einer geeigneten Schwelle für die GPD-Approximation zur Risikoanalyse zu objektivieren. Ein weiteres Ergebnis besteht darin, dass es in der Praxis sinnvoll ist, mehrere Methoden zur Schätzung der unbekanntenen GPD-Parameter heranzuziehen, insbesondere dann, wenn Entscheidungsträger eine möglichst gute Approximation des Verteilungsrandes der Risikogröße wünschen. In diesem Zusammenhang wurde herausgearbeitet, dass die Berechnung des RMSE im Verteilungsrand wertvolle Informationen über die Approximationsgüte liefern kann, insbesondere dann, wenn hohe Risikowerte von zentraler Bedeutung für das bankbetriebliche Risikomanagement sind.

Die zentrale Schlussfolgerung dieser Studie lautet somit: Die Verwendung zutreffender Risikoschätzungen und Modellannahmen ist eine zentrale Voraussetzung für ein wirksames und wirtschaftliches Risikomanagement in einer integrierten Gesamtbanksteuerung. Vor der Verwendung von theoretischen Verteilungsannahmen zur Risikoschätzung sind diese streng zu überprüfen, ob sie sich zur Risikoschätzung und -steuerung eignen, um Modellrisiken und Fehlsteuerungen sowie Risikounterdeckungen zu vermeiden. Das Konzept des LaR und VaR kann mit der Extremwertstatistik die Grenze der historischen Simulation und der Normalverteilung überwinden. Auf Basis des historischen Verlaufs einer Risikogröße können anhand einer überprüften Extremwertverteilung in Stressszenarien bisher noch nicht beobachtete Risikowerte geschätzt und diese der Risikotragfähigkeit gegenübergestellt werden. Unmittelbar damit verknüpft ist die Festlegung des Risikoniveaus für die Risikobewältigung, die bei lohnenswerten Risiken eine Entscheidung des Risikomanagements im Risikotragfähigkeitskalkül darstellt.

Literaturverzeichnis

- Balkema, A./ Haan, L. de (1974) : *Residual life time at great age*. In: Annals of Probability, Vol. 2, 1974, S. 792 – 804
- Bank for International Settlements Committee on the Global Financial System (2000) : Stress Testing by Large Financial Institutions : Current Practice and Aggregation Issues, April 2000, Basel 2000
- Beirlant, Jan/ Teugels, Jozef L./ Vynckier, Petra (1996) : *Practical Analysis of Extreme Values*, Leuven 1996
- Bensalah, Younes (2000) : *Steps in Applying Extreme Value Theory to Finance: A Review*, Bank of Canada Working Paper 2000-20 November 2000, Ottawa 2000
- Berge, Klaus/ Fröhlich, Stefan/ Locarek-Junge, Hermann (2006): Erfahrungen bei der praktischen Anwendung der Extremwertanalyse, in: Burkhardt, Thomas/ Knabe, Andreas/ Lohmann, Karl/ Walther, Ursula (Hrsg.): Risikomanagement aus der Bankenperspektive – Grundlagen, mathematische Konzepte und Anwendungsfelder, Berlin 2006, S. 181-198
- Berkowitz, Jeremy (2002) : *Value-at-risk Testing assumptions*. In: RISK 2002, Heft 5, S. 77 - 80
- Bessis, Joel (1998) : *Risk management in banking*, Chichester 1998
- Bobée, Bernard/ Ashkar, Fahim (1988) : *Generalized method of moments applied to LP3 distribution*. In: Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 114, 1988, No. 8, S. 899 - 909
- Boos, Karl-Heinz/ Fischer, Reinfrid/ Schulte-Mattler, Hermann (Hrsg.) (2000) : *Kreditwesengesetz : Kommentar zu KWG und Ausführungsvorschriften*, München 2000
- Borkovec, Milan/ Klüppelberg, Claudia (2000) : *Extremwerttheorie für Finanzzeitreihen - ein unverzichtbares Werkzeug im Risikomanagement*. In: Johanning, Lutz/ Rudolph, Bernd (Hrsg.): Handbuch Risikomanagement, Bad Soden/Ts. 2000, S. 219 - 244
- Börner, Christoph J. (1998) : *Strategisches Bankmanagement : Ressourcen- und marktorientierte Strategien von Universalbanken*, München et al. 2000
- Bosch, Karl (1998) : *Statistik-Taschenbuch*, 3. Aufl., München/ Wien 1998
- Bradley, Brendan O./ Taqqu, Murad S. (2001) : *Financial Risk and Heavy Tails*, working paper Boston University, Boston 2001. Verfügbar unter www.gloriamundiomundi.org/var/wps.html, zugegriffen am 15.01.2002
- Büschgen, Hans E. (1992) : *Das kleine Bank-Lexikon*, Köln 1992
- Büschgen, Hans E. (1998) : *Bankbetriebslehre*, 5. Aufl., Wiesbaden 1998
- Castillo, Enrique (1988) : *Extreme Value Theory in Engineering*, New York 1988
- Coles, Stuart (2001) : *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, London 2001
- Coles, Stuart G./ Powell, Elwyn A. (1996) : *Bayesian Methods in Extreme Value Modelling : A Review and New Developments*. In: International Statistical Review, Vol. 64, 1996, S. 119 - 136
- Eilenberger, Guido (1996) : *Bankbetriebswirtschaftslehre : Grundlagen - internationale Bankleistungen - Bank-Management*, 6. Aufl., München et al. 1996
- Embrechts, Paul/ Klüppelberg, Claudia/ Mikosch, Thomas (1997) : *Modelling Extremal Events, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability*, Berlin et al. 1997
- Embrechts, Paul/ Resnick, Sidney/ Samorodnitsky, Gennady (1998) : *Extreme value theory as a risk management tool*, Cairns 1998. Verfügbar unter <http://www.math.ethz.ch/~baltes/ftp/papers.html>, zugegriffen am 20.03.2001
- Emmer, Susanne/ Klüppelberg, Claudia/ Trüstedt, Matthias (1998) : *VaR - ein Maß für das extreme Risiko*, Technische Universität München Fakultät für Mathematik, München 1998. Verfügbar unter <http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/papers/>, zugegriffen am 15.06.2001
- Europäische Zentralbank (2002) : *Developments In Bank's Liquidity Profile And Management*, May 2002, Frankfurt am Main 2002
- Frey, Rüdiger/ McNeil, Alexander/ Schmock, Uwe (2001) : *Workshop on Extremal Events & Dependence Modelling With Applications to Financial Risk Management*, Swiss Re, Rüschlikon, 12 - 13 November 2001, Rüschlikon 2001
- Gençay, Ramazan/ Selçuk, Faruk (2001) : *Overnight borrowing, interest rates and extreme value theory*, Working Paper, University of Windsor Department of Economics, Windsor 2001. Verfügbar unter <http://econ.uwindsor.ca/manus.html>, zugegriffen am 15.03.2003
- Gumbel, Emil Julius (1958) : *Statistics of Extremes*, New York 1958
- Hogg, Robert V./ Klugman, Stuart A. (1984) : *Loss Distributions*, New York 1984
- Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R. (1987) : *Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution*. In: Technometrics, Vol. 29, 1987, No. 3, S. 339 - 349

- Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R. (1997) : *Regional frequency analysis: an approach based on L-Moments*, Cambridge 1997
- Hosking, J. R. M./ Wallis, J. R./ Wood, E. F. (1985) : *Estimation of the Generalized Extreme Value-Distribution by the Method of Probability Weighted Moments*. In: *Technometrics*, Vol. 27, 1985, No. 3, S. 251 - 261
- Këllezli, Evis/ Gilli, Manfred (2000) : *Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures*, Genf 2000. Verfügbar unter: <http://www.unige.ch/ses/metri/gilli/publicat.html>, zugegriffen am 12.02.2002
- Kremer, Erhard (1997) : *Die verallgemeinerte Pareto-Verteilung in der Rückversicherung*, Preprint No. 97-09, Universität Hamburg Institut für mathematische Stochastik, Hamburg 1997
- Lo, Brian (2001) : *Latest Techniques in Market Risk Management & Job Requirements of Market Risk Managers : Professional seminars on Risk Management City University of Hong Kong BNP Paribas January 13, 2001*, Hong Kong 2001. Verfügbar unter http://www.cityu.edu.hk/rcf/all_files/2001_RM_01.PDF, zugegriffen am 15.02.2002
- Longin, François (2000) : *From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach*. In: *JoBF*, Vol. 24, 2000, No. 7, S. 1097 - 1130
- Malevergne, Vannick/ Sornette, Didier : *Extreme Financial Risks – From Dependence to Risk Management*, Berlin et al. 2006
- Manganelli, Simone/ Engel, Robert F. (2001) : *Value at Risk Models in Finance*, European Central Bank Working Paper Series Working Paper No. 75 - August 2001, Frankfurt am Main 2001
- McNeil, Alexander (1997a) : *Estimating The Tails Of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory*. In: *ASTIN Bulletin*, Vol. 27, 1997, No. 1, S. 117 - 137
- McNeil, Alexander (1997b) : *On Extremes and Crashes*, Zürich 1997
- McNeil, Alexander (1999) : *Extreme Value Theory for Risk Managers*, Zürich 1999
- McNeil, Alexander (2001) : *EVIS software for extreme value analysis*, Zürich 2001. Verfügbar unter <http://www.math.ethz.ch/~mcneil/software.html>, zugegriffen am 30.11.2001
- McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1997) : *The Peaks over Threshold Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions*, ETH Zürich April 24 1997, Zürich 1997
- McNeil, Alexander/ Saladin, Thomas (1998) : *Developing Scenarios for Future Extreme Losses Using the POT Model*, ETH Zürich Juli 1998, Zürich 1998
- Meyer zu Selhausen, Hermann (1995) : *Liquiditätspolitik der Banken und Liquiditätsgrundsätze*. In: Gerke, Wolfgang/ Steiner, Manfred (Hrsg.): *Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens*, 2. Aufl., Stuttgart 1995, Sp. 1388 – 1398
- Patie, Pierre (2000) : *Value-at-Risk using Extreme Value Theory*, Zürich 2000. Verfügbar unter <http://www.math.ethz.ch/~patie>, zugegriffen am 30.11.2001
- Pickands, James (1975) : *Statistical inference using extreme order statistics*. In: *The Annals of Statistics*, Vol. 3, 1975, S. 119 - 131
- Reiss, Rolf-Dieter/ Thomas, Michael (2001) : *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and other Fields*, 2nd ed., Basel et al. 2001
- Schierenbeck, Henner (2000) : *Risikomanagement*. In: Hagen, Jürgen von/ Stein, Johann von (Hrsg.): *Geld-, Bank- und Börsenwesen : Handbuch / Obst; Hintner*, 40. Aufl., Stuttgart 2000, S. 1446 - 1487
- Schierenbeck, Henner (2001a) : *Ertragsorientiertes Bankmanagement Band 1: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling*, 7. Aufl., Wiesbaden 2001
- Schierenbeck, Henner (2001b) : *Ertragsorientiertes Bankmanagement Band 2: Risiko-Controlling und Bilanzstrukturmanagement*, 7. Aufl., Wiesbaden 2001
- Schlittgen, Rainer (1998) : *Einführung in die Statistik : Analyse und Modellierung von Daten*, 8. Aufl., München et al. 1998
- Severin, Martin (2002) : *Randbereiche von Verteilungen: Fat Tails*, München 2002. Verfügbar unter <http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/severin/>, zugegriffen am 28.03.2003
- Shim, J. S./ Oh, B. C./ Jun, K. C. (1994) : *Estimation Of Extreme Sea Levels At Major Ports In Korea*. In: Galambos, Janos/ Lechner, James/ Simiu, Emil (Eds.) (1994), S. 187 - 196
- Smith, Richard L. (1989) : *Extreme Value Analysis of Environmental Time Series : An Application to Trend Detection in Ground-Level Ozone (with discussion)*. In: *Statistical Science*, Vol. 4, 1989, S. 367 - 393
- Smith, Richard L. (2000) : *Measuring Risk with Extreme Value Theory*, Department of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill 2000
- Thießen, Friedrich (Hrsg.) (1999) : *Enzyklopädisches Lexikon für das Geld-, Bank- und Börsenwesen*, 4. Aufl., Frankfurt am Main 1999
- Tsay, Ruey S. (2000) : *Extreme Values, Quantile Estimation and Value at Risk*, Chicago 2000

- Wilkins, Klaus (1975) : *Kapitalflußrechnungen als Instrumente der Bank-Liquiditätsdisposition*. In: B. Bl. 1975, Heft 6, S. 210 - 216
- Wittgen, Robert/ Eilenberger, Udo (1984) : *Die Geldpolitik der Kreditinstitute : inländische und internationale Geldmärkte und Geldgeschäfte ; Optimal- und Realbedingungen der Gelddisposition*, 2. Aufl., Frankfurt am Main 1984
- Zeranski, Stefan (2005): *Liquidity at Risk zur Steuerung des liquiditätsmäßig-finanziellen Bereichs von Kreditinstituten*, Dissertation, Chemnitz 2005
- Zuber, Christof (1987) : *Steuerung der Liquidität im Bankbetrieb*, Diss., Bern/ Stuttgart 1987